Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Математический анализ

Модуль 4. Функции нескольких переменных

Лекция 4.1

к.ф.-м.н. Семакин А.Н.

Функция нескольких переменных

Функция нескольких переменных

Определение

Множество всевозможных упорядоченных последовательностей n действительных чисел $(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется **n-мерным точечным арифметическим пространством $\mathbf{R^n}$**.

Определение

Елементы множества R^n называются **точками n-мерного пространства** и обозначаются: $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Определение

Число x_i называется **i-ой координатой** точки x.

Функция нескольких переменных

Расстояние между двумя точками $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ определяется по формуле:

Расстояние между двумя точками
$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$
определяется по формуле:
$\rho(x, y) =$

Расстояние между двумя точками
$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$
определяется по формуле:
$\rho(x, y) =$
$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}$

Определение

Пусть задано множество $E \subset R^n$.

Определение

Пусть задано множество $E \subset R^n$. Если каждой точке $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in E$ поставлено в соответствие число $u \in R$, то на множестве E задана **функция n переменных** $u = f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Определение

Пусть задано множество $E \subset R^n$. Если каждой точке $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in E$ поставлено в соответствие число $u \in R$, то на множестве E задана **функция n переменных** $u = f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ называются независимыми переменными,

Функция нескольких переменных

Определение

Пусть задано множество $E \subset R^n$. Если каждой точке $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in E$ поставлено в соответствие число $u \in R$, то на множестве E задана **функция n переменных** $u = f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ называются независимыми переменными, u - зависимой,

Функция нескольких переменных

Определение

Пусть задано множество $E \subset R^n$. Если каждой точке $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in E$ поставлено в соответствие число $u \in R$, то на множестве E задана **функция n переменных** $u = f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ называются независимыми переменными, u - зависимой, а множество E - областью определения функции f.

Определение

Множество точек $(x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющих уравнению

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = C,$$

где C - некоторая постоянная, называется **множеством уровня** функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, соответствующим значению C.

Частные случаи:

Частные случаи:
При $n = 2$ множество уровня называется линией уровня.

Функция нескольких переменных

Частные случаи:
При $n = 2$ множество уровня называется линией уровня.
При $n = 3$ множество уровня называется поверхностью уровня.

Предел и непрерывность

Пусть E - область определения функции $f(x)$.

Пусть E - область определения функции $f(x)$.

Определение

Число b называется **пределом** функции $f(x)$ в точке a, если

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x \in E, 0 < \rho(x, a) < \delta(\varepsilon)$:

$|f(x) - b| < \varepsilon$.

Предел и непрерывность

Обозначение:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

Обозначение:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \text{ или } \lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2 \\ \ldots \\ x_n \to a_n}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b.$$

В определении предела предполагается, что x стремится к a произвольным образом.

Определение

Функция $f(x)$ называется **непрерывной** в точке a, если

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Определение
Функция $f(x)$ **непрерывна на множестве** $X \subset E$, если она непрерывна в каждой точке из множества X.

Свойства непрерывных функций:

Свойства непрерывных функций:

1. Сумма, произведение, частное и суперпозиция непрерывных функций есть функция непрерывная.

Свойства непрерывных функций:

1. Сумма, произведение, частное и суперпозиция непрерывных функций есть функция непрерывная.
2. Элементарные функции нескольких переменных непрерывны всюду, где они определены.

Определение

Функция $f(x)$ называется **бесконечно большой** при $x \to a$, если

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty.$$

Определение

Функция $f(x)$ называется **бесконечно малой** при $x \to a$, если

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0.$$

Частные производные 1-ого порядка

Частные производные 1-ого порядка

Рассмотрим функцию 2-х переменных $u = f(x_1, x_2)$, которая определена в некоторой ε-окрестности точки $a = (a_1, a_2)$.

Определение

Частной производной функции $f(x_1, x_2)$ по переменной x_1 в точке $a = (a_1, a_2)$ называется предел

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(a_1 + \Delta x_1, a_2) - f(a_1, a_2)}{\Delta x_1}.$$

Определение

Частной производной функции $f(x_1, x_2)$ по переменной x_1 в точке $a = (a_1, a_2)$ называется предел

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(a_1 + \Delta x_1, a_2) - f(a_1, a_2)}{\Delta x_1}.$$

Обозначение: $\dfrac{\partial f(a_1, a_2)}{\partial x_1}$, $f'_{x_1}(a_1, a_2)$, $f'_{x_1}(a)$.

Частные производные 1-ого порядка

Определение

Частной производной функции $f(x_1, x_2)$ по переменной x_2 в точке $a = (a_1, a_2)$ называется предел

$$\lim_{\Delta x_2 \to 0} \frac{f(a_1, a_2 + \Delta x_2) - f(a_1, a_2)}{\Delta x_2}.$$

Определение
Частной производной функции $f(x_1, x_2)$ по переменной x_2 в точке $a = (a_1, a_2)$ называется предел

$$\lim_{\Delta x_2 \to 0} \frac{f(a_1, a_2 + \Delta x_2) - f(a_1, a_2)}{\Delta x_2}.$$

Обозначение: $\dfrac{\partial f(a_1, a_2)}{\partial x_2}$, $f'_{x_2}(a_1, a_2)$, $f'_{x_2}(a)$.

Частные производные 1-ого порядка

Геометрическая интерпретация

Частная производная $\dfrac{\partial f(a_1, a_2)}{\partial x_1}$ – это тангенс угла наклона касательной к графику функции $f(x_1, x_2)$ в точке a, проведенной в направлении оси Ox_1.

Геометрическая интерпретация

Частная производная $\dfrac{\partial f(a_1, a_2)}{\partial x_1}$ – это тангенс угла наклона касательной к графику функции $f(x_1, x_2)$ в точке a, проведенной в направлении оси Ox_1.

Аналогично: $\dfrac{\partial f(a_1, a_2)}{\partial x_2}$ – тангенс угла наклона касательной, проведенной в направлении оси Ox_2.

Рассмотрим функцию n переменных $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Частные производные 1-ого порядка

Определение

Частной производной функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в точке $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ по переменной x_i называется предел

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + \Delta x_i, a_{i+1}, \dots, a_n) -}{\Delta x_i}$$

$$\frac{-f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)}{}.$$

Частные производные 1-ого порядка

Обозначение:

Частные производные 1-ого порядка

Обозначение:

$$\frac{\partial f(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{\partial x_i}, \; f'_{x_i}(a_1, a_2, \ldots, a_n), \; f'_{x_i}(a).$$

Частные производные 1-ого порядка

Данная частная производная также называется частной производной 1-ого порядка.

Определение

Функция $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ называется **дифференцируемой** в точке $a = (a_1, \ldots, a_n)$, если существуют числа A_1, …, A_n такие, что

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + \ldots + A_n \Delta x_n + \circ(\rho), \rho \to 0,$$

Дифференцируемость ФНП

Определение

Функция $u = f(x_1, ..., x_n)$ назывется **дифференцируемой** в точке $a = (a_1, ..., a_n)$, если существуют числа A_1, ..., A_n такие, что

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + ... + A_n \Delta x_n + \circ(\rho), \rho \to 0,$$

где $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + ... + \Delta x_n^2}$,

Определение

Функция $u = f(x_1, \dots, x_n)$ назывется **дифференцируемой** в точке $a = (a_1, \dots, a_n)$, если существуют числа $A_1, \dots, A_n$ такие, что

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_n \Delta x_n + \circ(\rho), \rho \to 0,$$

где $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_n^2}$,
$\Delta u = f(a_1 + \Delta x_1, \dots, a_n + \Delta x_n) - f(a_1, \dots, a_n)$ – полное приращение функции.

Теорема (необходимое условие дифференцируемости)

Дифференцируемость ФНП

Теорема (необходимое условие дифференцируемости)
Если функция $f(x_1, ..., x_n)$ дифференцируема в точке a, то в этой точке существуют все частные производные первого порядка, причем $A_1 = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}, ..., A_n = \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$.

Теорема (достаточное условие дифференцируемости)

Дифференцируемость ФНП

Теорема (достаточное условие дифференцируемости)
Пусть в некоторой окрестности точки a существуют частные производные 1-ого порядка, которые непрерывны в самой точке a. Тогда функция $u = f(x_1, ..., x_n)$ дифференцируема в точке a.

Дифференцируемость ФНП

Теорема (о непрерывности)

Теорема (о непрерывности)
Если функция $u = f(x_1, ..., x_n)$ дифференцируема в точке a, то она непрерывна в ней.

Дифференцируемость ФНП

Определение

Функция называется **непрерывно дифференцируемой** в точке a, если она имеет в этой точке непрерывные частные производные 1-ого порядка.