

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Математический анализ
Модуль 3. Дифференциальное исчисление
функций одной переменной
Лекция 3.3

к.ф.-м.н. Семакин А.Н.



Формула Тейлора



Формула Тейлора

Определение

Многочленом Тейлора степени n

функции $f(x)$ в точке c называется многочлен вида

$$P_n(x) = f(c) + \frac{1}{1!}f'(c)(x - c) + \\ + \frac{1}{2!}f''(c)(x - c)^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(x - c)^n.$$



Формула Тейлора

*Свойство многочлена Тейлора**



Формула Тейлора

*Свойство многочлена Тейлора**

В точке c совпадают значения функции и ее многочлена Тейлора, а также значения их первых n производных, т.е. $P_n(c) = f(c)$,
 $P'_n(c) = f'(c)$, ..., $P_n^{(n)}(c) = f^{(n)}(c)$.



Формула Тейлора

Доказательство



Формула Тейлора

Доказательство

$$P_n(c) =$$



Формула Тейлора

Доказательство

$$P_n(c) = f(c) + \frac{1}{1!}f'(c)(c - c) + \\ + \frac{1}{2!}f''(c)(c - c)^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(c - c)^n$$



Формула Тейлора

Доказательство

$$\begin{aligned} P_n(c) &= f(c) + \frac{1}{1!}f'(c)(c - c) + \\ &+ \frac{1}{2!}f''(c)(c - c)^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(c - c)^n = \\ &= f(c). \end{aligned}$$



Формула Тейлора

$$P'_n(x) =$$



Формула Тейлора

$$P'_n(x) = \frac{1}{1!}f'(c) + \frac{1}{2!}2f''(c)(x - c) + \dots + \frac{1}{n!}nf^{(n)}(c)(x - c)^{n-1}.$$



Формула Тейлора

$$P'_n(x) = \frac{1}{1!}f'(c) + \frac{1}{2!}2f''(c)(x - c) + \dots + \\ + \frac{1}{n!}nf^{(n)}(c)(x - c)^{n-1}.$$

$$P'_n(c) =$$



Формула Тейлора

$$P'_n(x) = \frac{1}{1!}f'(c) + \frac{1}{2!}2f''(c)(x - c) + \dots + \frac{1}{n!}nf^{(n)}(c)(x - c)^{n-1}.$$

$$P'_n(c) = f'(c).$$



Формула Тейлора

$$P'_n(x) = \frac{1}{1!}f'(c) + \frac{1}{2!}2f''(c)(x - c) + \dots + \frac{1}{n!}nf^{(n)}(c)(x - c)^{n-1}.$$

$$P'_n(c) = f'(c).$$

Аналогично для остальных производных. ■



Формула Тейлора

Теорема (формула Тейлора)



Формула Тейлора

Теорема (формула Тейлора)

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b) и имеет в точке $c \in (a, b)$ производные до порядка n включительно. Тогда $\forall x \in (a, b)$ справедлива формула Тейлора n -ого порядка

$$f(x) = f(c) + \frac{1}{1!}f'(c)(x - c) + \\ + \frac{1}{2!}f''(c)(x - c)^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(x - c)^n + r_n,$$

где r_n - остаточный член формулы Тейлора.



Формула Тейлора

Формы записи остаточного члена:



Формула Тейлора

Формы записи остаточного члена:

1) форма Пеано



Формула Тейлора

Формы записи остаточного члена:

1) форма Пеано

$$r_n = o((x - c)^n), x \rightarrow c$$



Формула Тейлора

Формы записи остаточного члена:

1) форма Пеано

$$r_n = o((x - c)^n), x \rightarrow c$$

2) форма Лагранжа



Формула Тейлора

Формы записи остаточного члена:

1) форма Пеано

$$r_n = o((x - c)^n), x \rightarrow c$$

2) форма Лагранжа

$$r_n = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c + \theta(x - c))(x - c)^{n+1},$$



Формула Тейлора

Формы записи остаточного члена:

1) форма Пеано

$$r_n = o((x - c)^n), x \rightarrow c$$

2) форма Лагранжа

$$r_n = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c + \theta(x - c))(x - c)^{n+1},$$

$$0 < \theta < 1$$



Формула Маклорена



Формула Маклорена

Определение

Формулой Маклорена называется формула Тейлора при $c = 0$, т.е. формула вида

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!}f'(0) \cdot x + \frac{1}{2!}f''(0) \cdot x^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0) \cdot x^n + o(x^n), x \rightarrow 0.$$



Приближенные вычисления по формуле Тейлора



Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Разложив функцию $f(x)$ по формуле Тейлора в окрестности точки c , будем иметь

$$f(x) = P_n(x) + r_n \quad \forall x \in U(c),$$



Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Разложив функцию $f(x)$ по формуле Тейлора в окрестности точки c , будем иметь

$$f(x) = P_n(x) + r_n \quad \forall x \in U(c),$$

где $P_n(x)$ - многочлен Тейлора степени n ,



Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Разложив функцию $f(x)$ по формуле Тейлора в окрестности точки c , будем иметь

$$f(x) = P_n(x) + r_n \quad \forall x \in U(c),$$

где $P_n(x)$ - многочлен Тейлора степени n , а $r_n = o((x - c)^n)$, $x \rightarrow c$ - остаточный член формулы Тейлора.



Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Отбросив r_n , получим приближенную формулу

$$f(x) \approx P_n(x).$$



Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Отбросив r_n , получим приближенную формулу

$$f(x) \approx P_n(x).$$

Чем больше n и ближе x к c , тем точнее данная формула.



Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Пример:



Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Пример:

$$\sin \frac{\pi}{6} = 0.5,$$



Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Пример:

$$\sin \frac{\pi}{6} = 0.5, \quad \frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$



Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Пример:

$$\sin \frac{\pi}{6} = 0.5, \quad \frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x + o(x^2) \approx$$



Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Пример:

$$\sin \frac{\pi}{6} = 0.5, \quad \frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x + o(x^2) \approx x,$$



Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Пример:

$$\sin \frac{\pi}{6} = 0.5, \quad \frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x + o(x^2) \approx x, \quad \sin \frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$



Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Пример:

$$\sin \frac{\pi}{6} = 0.5, \quad \frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x + o(x^2) \approx x, \quad \sin \frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \approx$$



Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Пример:

$$\sin \frac{\pi}{6} = 0.5, \quad \frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x + o(x^2) \approx x, \quad \sin \frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \approx x - \frac{x^3}{3!},$$



Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Пример:

$$\sin \frac{\pi}{6} = 0.5, \frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x + o(x^2) \approx x, \sin \frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \approx x - \frac{x^3}{3!}, \sin \frac{\pi}{6} \approx 0.4997.$$



Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Пример:

$$\sin \frac{\pi}{6} = 0.5, \quad \frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x + o(x^2) \approx x, \quad \sin \frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \approx x - \frac{x^3}{3!}, \quad \sin \frac{\pi}{6} \approx 0.4997.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) \approx$$



Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Пример:

$$\sin \frac{\pi}{6} = 0.5, \quad \frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x + o(x^2) \approx x, \quad \sin \frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \approx x - \frac{x^3}{3!}, \quad \sin \frac{\pi}{6} \approx 0.4997.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!},$$



Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Пример:

$$\sin \frac{\pi}{6} = 0.5, \quad \frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x + o(x^2) \approx x, \quad \sin \frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \approx x - \frac{x^3}{3!}, \quad \sin \frac{\pi}{6} \approx 0.4997.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!},$$
$$\sin \frac{\pi}{6} \approx 0.500003.$$



Монотонность функции



Монотонность функции

Определение

Функция $f(x)$ называется **возрастающей** (**убывающей**) на (a, b) , если $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$: $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$).



Монотонность функции

Определение

Функция $f(x)$ называется **строго возрастающей** (строго убывающей) на (a, b) , если $\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2: f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).



Монотонность функции

Определение

Возрастающие и убывающие функции также называются **МОНОТОННЫМИ**.



Монотонность функции

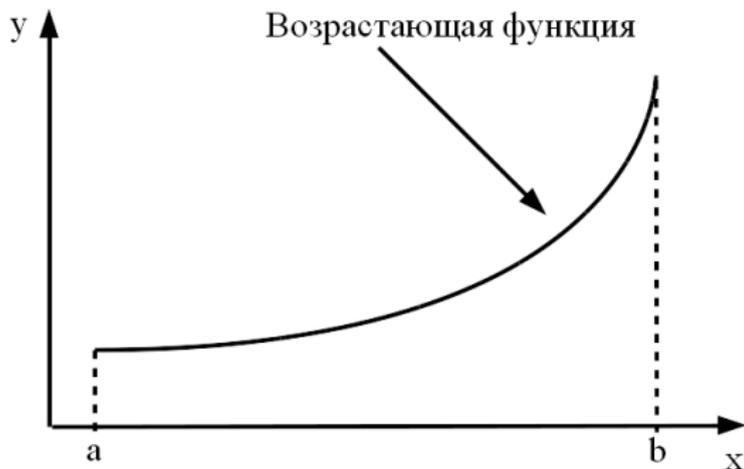


Рис.: Возрастающая функция



Монотонность функции

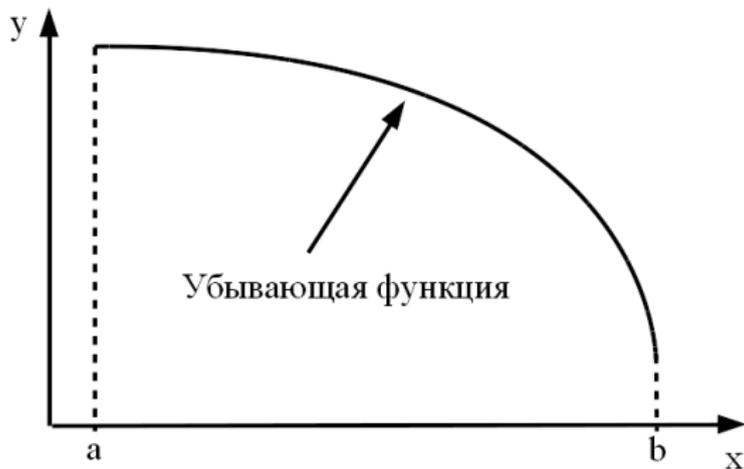


Рис.: Убывающая функция



Монотонность функции

Обозначения



Монотонность функции

Обозначения

$$f(x) \in C(c), f(x) \in C(a, b), f(x) \in C[a, b]$$



Монотонность функции

Обозначения

$f(x) \in C(c)$, $f(x) \in C(a, b)$, $f(x) \in C[a, b]$ -
функция $f(x)$ непрерывна в точке c , на
интервале (a, b) , на отрезке $[a, b]$.



Монотонность функции

Обозначения

$$f(x) \in D(c), f(x) \in D(a, b), f(x) \in D[a, b]$$



Монотонность функции

Обозначения

$f(x) \in D(c)$, $f(x) \in D(a, b)$, $f(x) \in D[a, b]$ -
функция $f(x)$ дифференцируема в точке c , на
интервале (a, b) , на отрезке $[a, b]$, т.е. имеет
производную $f'(x)$.



Монотонность функции

Обозначения

$$f(x) \in D^2(c), f(x) \in D^2(a, b), f(x) \in D^2[a, b]$$



Монотонность функции

Обозначения

$f(x) \in D^2(c)$, $f(x) \in D^2(a, b)$, $f(x) \in D^2[a, b]$ -
функция $f(x)$ дважды дифференцируема в
точке c , на интервале (a, b) , на отрезке $[a, b]$,
т.е. имеет производные $f'(x)$, $f''(x)$.



Монотонность функции

*Теорема (достаточное условие монотонности)**



Монотонность функции

*Теорема (достаточное условие монотонности)**

Пусть $f(x) \in C[a, b]$, $f(x) \in D(a, b)$. Если $\forall x \in (a, b) f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$), то на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ возрастает (убывает).



Монотонность функции

Доказательство



Монотонность функции

Доказательство

Пусть $x_1, x_2 \in [a, b]$ и $x_1 < x_2$.



Монотонность функции

Доказательство

Пусть $x_1, x_2 \in [a, b]$ и $x_1 < x_2$.

По теореме Лагранжа

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c), c \in (x_1, x_2).$$



Монотонность функции

$$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$



Монотонность функции

$$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

$$x_2 - x_1 > 0.$$



Монотонность функции

$$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

$$x_2 - x_1 > 0.$$

Если $f'(c) \geq 0$, то



Монотонность функции

$$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

$$x_2 - x_1 > 0.$$

Если $f'(c) \geq 0$, то $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$,



Монотонность функции

$$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

$$x_2 - x_1 > 0.$$

Если $f'(c) \geq 0$, то $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$,

$$f(x_2) \geq f(x_1)$$



Монотонность функции

$$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

$$x_2 - x_1 > 0.$$

Если $f'(c) \geq 0$, то $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$,

$f(x_2) \geq f(x_1)$ - $f(x)$ возрастает.



Монотонность функции

$$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

$$x_2 - x_1 > 0.$$

Если $f'(c) \geq 0$, то $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$,

$f(x_2) \geq f(x_1)$ - $f(x)$ возрастает.

Если $f'(c) \leq 0$, то



Монотонность функции

$$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

$$x_2 - x_1 > 0.$$

Если $f'(c) \geq 0$, то $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$,

$f(x_2) \geq f(x_1)$ - $f(x)$ возрастает.

Если $f'(c) \leq 0$, то $f(x_2) - f(x_1) \leq 0$,



Монотонность функции

$$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

$$x_2 - x_1 > 0.$$

Если $f'(c) \geq 0$, то $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$,

$f(x_2) \geq f(x_1)$ - $f(x)$ возрастает.

Если $f'(c) \leq 0$, то $f(x_2) - f(x_1) \leq 0$,

$$f(x_2) \leq f(x_1)$$



Монотонность функции

$$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

$$x_2 - x_1 > 0.$$

Если $f'(c) \geq 0$, то $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$,

$f(x_2) \geq f(x_1)$ - $f(x)$ возрастает.

Если $f'(c) \leq 0$, то $f(x_2) - f(x_1) \leq 0$,

$f(x_2) \leq f(x_1)$ - $f(x)$ убывает.



Экстремум функции



Экстремум функции

Определение

Точка c называется **стационарной точкой** функции $f(x)$, если $f'(c) = 0$.



Экстремум функции

Определение

Точка c называется **критической точкой** функции $f(x)$, если $f'(c)$ равен нулю или не существует.



Экстремум функции

Определение

Точка c называется **точкой локального максимума (минимума)** функции $f(x)$, если существует некоторая окрестность этой точки $U(c)$ такая, что $\forall x \in U(c) f(x) \leq f(c)$ ($f(x) \geq f(c)$).



Экстремум функции

Определение

Точки локального максимума и минимума также называются **точками экстремума**.



Экстремум функции

Определение

Значение функции $f(x)$ в точке локального максимума (минимума) называется **локальным максимумом (минимумом) или экстремумом функции.**



Экстремум функции

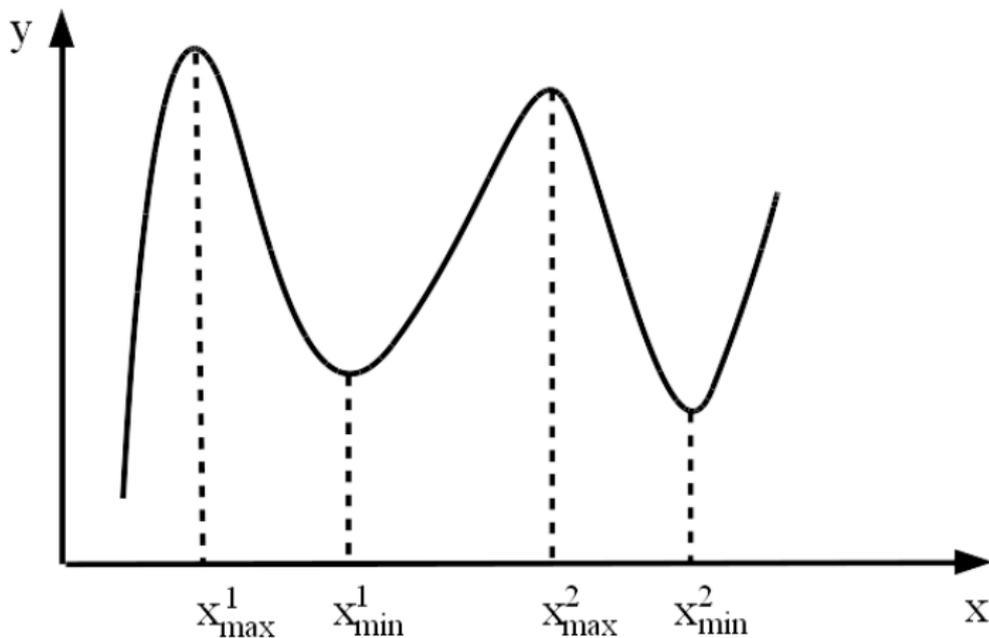


Рис.: Точки экстремума



Экстремум функции

x_{min}^1, x_{min}^2 - точки локального минимума,
 x_{max}^1, x_{max}^2 - точки локального максимума.

