Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Линейная алгебра

Модуль 2. Линейные операторы в евклидовом пространстве.Квадратичные формы

Лекция 2.3

к.ф.-м.н. Емгушева Г.П.

Метод ортогонального преобразования

Метод ортогонального преобразования

Пусть E - n-мерное евклидово пространство.

Метод ортогонального преобразования

Пусть E - n-мерное евклидово пространство. При переходе от базиса $\{e\}$ к базису $\{f\}$ матрица квадратичной формы меняется по закону

$$A_f = T_{e\longrightarrow f}^T \cdot A_e \cdot T_{e\longrightarrow f},$$

где $T_{e\longrightarrow f}$ - матрица перехода от базиса $\{e\}$ к базису $\{f\}$.

Так как матрица квадратичной формы является симметрической, то она может быть приведена ортогональным преобразованием к диагональному виду,

Метод ортогонального преобразования

Так как матрица квадратичной формы является симметрической, то она может быть приведена ортогональным преобразованием к диагональному виду, то есть для матрицы A_e существует такая ортогональная матрица U

Так как матрица квадратичной формы является симметрической, то она может быть приведена ортогональным преобразованием к диагональному виду, то есть для матрицы A_e существует такая ортогональная матрица $U \left(U^{-1} = U^T \right)$, Так как матрица квадратичной формы является симметрической, то она может быть приведена ортогональным преобразованием к диагональному виду, то есть для матрицы A_e существует такая ортогональная матрица $U \left(U^{-1} = U^T \right)$, что $U^T A_e U = \Lambda$, где Λ - диагональная матрица, у которой на главной диагонали стоят собственные значения матрицы A, где Λ - диагональная матрица, у которой на главной диагонали стоят собственные значения матрицы A, являющиеся решениями уравнения: $|A - \lambda E| = 0$.

Метод ортогонального преобразования

где Λ - диагональная матрица, у которой на главной диагонали стоят собственные значения матрицы A, являющиеся решениями уравнения: $|A - \lambda E| = 0$. При этом матрица U является матрицей перехода от старого ортонормированного базиса к новому ортонормированному базису.

Метод ортогонального преобразования

Квадратичная форма с матрицей

$$A_f = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

имеет канонический вид

$$f(x) = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2.$$

Метод ортогонального преобразования

Ортонормированный базис $\{f\}$, состоящий из собственных векторов матрицы A_e (соответствующие собственным значениям), является каноническим базисом квадратичной формы.

Закон инерции квадратичных форм

Определение

Ранг матрицы квадратичной формы в любом базисе называется **рангом квадратичной формы.**

Теорема (закон инерции квадратичных форм)
Число слагаемых с положительными (отрицательными) каноническими коэффициентами в каноническом виде квадратичной формы не зависит от способа приведения квадратичной формы к каноническому виду.

Замечание

Ни канонический базис, ни канонический вид квадратичной формы не определяются однозначно.

Теорема (независимость ранга от выбора базиса)
Ранг квадратичной формы не меняется при невырожденных линейных преобразованиях и равен:
1) числу отличных от нуля канонических коэффициентов,
2) количеству ненулевых собственных значений матрицы квадратичной формы в любом базисе (с учетом их кратности).

Приведение уравнений кривых и поверхностей 2 порядка к каноническому виду

Приведение уравнений кривых и поверхностей 2 порядка к каноническому виду

Рассмотрим $\boldsymbol{n}$-мерное вещественное евклидово пространство R^n. Пусть $\{\boldsymbol{e}\}$ - ортонормированный базис в R^n.

Приведение уравнений кривых и поверхностей 2 порядка к каноническому виду

Рассмотрим геометрическое место точек $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ в этом базисе, удовлетворяющих уравнению

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + c = 0, \qquad (1)$$

где c, a_{ij}, b_i - действительные коэффициенты, $a_{ij} = a_{ji}\ \forall i, j$, среди коэффициентов a_{ij} хотя бы один не равен нулю.

Замечание 1.

Уравнение (1) при $n = 2$ является уравнением кривой второго порядка на плоскости, при $n = 3$ - уравнением поверхности второго порядка в трехмерном пространстве.

Замечание 2.
Слагаемое $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ называется **группой старших членов** уравнения (1), группа слагаемых $\sum_{i=1}^{n} b_ix_i + c$ называется **линейной частью** уравнения (1).

Замечание 3.

Группа старших членов является квадратичной формой

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \tag{2}$$

Приведение уравнений кривых и поверхностей 2 порядка к каноническому виду

Замечание 3 (продолжение).

с симметричной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

Замечание 3 (продолжение).

члены первого порядка образуют линейную форму

$$\sum_{i=1}^{n} b_i x_i$$

с матрицей-строкой

$$B = (b_1, \ldots, b_n) .$$

Приведение уравнений кривых и поверхностей 2 порядка к каноническому виду

Уравнение (1) в матричном виде -

$$X^T AX + BX + c = 0,$$

где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ – матрица-столбец переменных, c – свободный член.

Замечание 4. Типы кривых второго порядка (при n=2):

Приведение уравнений кривых и поверхностей 2 порядка к каноническому виду

Замечание 4. Типы кривых второго порядка (при n=2):

1. Если $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, то уравнение (1) определяет кривую **эллиптического типа**.

Замечание 4. Типы кривых второго порядка (при n=2):

1. Если $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, то уравнение (1) определяет кривую **эллиптического типа**.
2. Если $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$, то уравнение (1) определяет кривую **гиперболического типа**.

Замечание 4. Типы кривых второго порядка (при n=2, продолжение):

3. Если $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ и $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$, то уравнение (1) определяет кривую **параболического типа**.

Приведение уравнений кривых и поверхностей 2 порядка к каноническому виду

Приведение уравнения (1) к каноническому виду

Существует ортонормированный базис, состоящий из ортонормированных собственных векторов матрицы A, в котором квадратичная форма (2) имеет канонический вид $f(x_1, \ldots, x_n) = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$,

Приведение уравнений кривых и поверхностей 2 порядка к каноническому виду

где $\lambda_i, i = \overline{1, n}$, - собственные значения матрицы A, повторяющиеся столько раз, какова их кратность. Матрица перехода U от старого ортонормированного базиса $(x_1, \ldots, x_n)$ к новому ортонормированному базису $(y_1, \ldots, y_n)$ является ортогональной и состоит из координат ортонормированных собственных векторов матрицы A, отвечающих собственным значениям λ_i. Преобразование с матрицей U будет ортогональным.

Приведение уравнений кривых и поверхностей 2 порядка к каноническому виду

Любую квадратичную форму ортогональным преобразованием можно привести к каноническому виду.

Приведение уравнений кривых и поверхностей 2 порядка к каноническому виду

Сделаем замену переменных $X = UY$, тогда уравнение (1) примет вид:

Приведение уравнений кривых и поверхностей 2 порядка к каноническому виду

Сделаем замену переменных $X = UY$, тогда уравнение (1) примет вид:

$$(UY)^T A(UY) + B(UY) + c = 0$$

Приведение уравнений кривых и поверхностей 2 порядка к каноническому виду

Сделаем замену переменных $X = UY$, тогда уравнение (1) примет вид:

$$(UY)^T A(UY) + B(UY) + c = 0$$

$$\Downarrow$$

$$Y^T\left(U^T AU\right)Y + (BU)\,Y + c = 0$$

Приведение уравнений кривых и поверхностей 2 порядка к каноническому виду

Сделаем замену переменных $X = UY$, тогда уравнение (1) примет вид:

$$(UY)^T A (UY) + B (UY) + c = 0$$

$$\Downarrow$$

$$Y^T \left(U^T A U\right) Y + (BU) Y + c = 0$$

$$\Downarrow$$

$$Y^T \Lambda Y + DY + c = 0, \qquad (3)$$

где

$$\Lambda = U^T A U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

– матрица квадратичной формы в ортонормированном базисе $(y_1, \ldots, y_n)$, $D = BU$.

Приведение уравнений кривых и поверхностей 2 порядка к каноническому виду

Уравнение (3) можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 + \sum_{i=1}^{n} d_i y_i + c = 0. \tag{4}$$

Уравнение (4) проще уравнения (1), так как не содержит слагаемых вида $y_i y_j$ при $i \neq j$.

Замечание

Преобразованию координат $X = UY$ соответствует поворот осей $Ox_1, \ldots, Ox_n$ на некоторый угол φ.

Приведение уравнений кривых и поверхностей 2 порядка к каноническому виду

Алгоритм преобразования уравнения (1) к виду (4):

Алгоритм преобразования уравнения (1) к виду (4):

1. Найти собственные значения матрицы A из решения характеристического уравнения $det\,(A-\lambda E)=0$.

Приведение уравнений кривых и поверхностей 2 порядка к каноническому виду

Алгоритм преобразования уравнения (1) к виду (4):

2. Для каждого собственного значения найти соответствующий собственный вектор из решения однородной СЛАУ $(A - \lambda E)X = O$. Все собственные векторы должны быть попарно ортогональными, а их количество должно быть равно количеству собственных значений, учитывая их кратность.

Приведение уравнений кривых и поверхностей 2 порядка к каноническому виду

Алгоритм преобразования уравнения (1) к виду (4):

3. Построить ортонормированную систему элементов (ортонормированный базис), пронормировав найденные собственные векторы.

Приведение уравнений кривых и поверхностей 2 порядка к каноническому виду

Алгоритм преобразования уравнения (1) к виду (4):

4. Составить ортогональную матрицу перехода U, столбцы которой являются координатами этих собственных векторов. Так как система собственных векторов образует ортонормированный базис, то матрица U будет ортогональной.

Приведение уравнений кривых и поверхностей 2 порядка к каноническому виду

Алгоритм преобразования уравнения (1) к виду (4):

5. Используя преобразование координат $X = UY$, записать уравнение (4).

Приведение уравнений кривых и поверхностей 2 порядка к каноническому виду

Алгоритм преобразования уравнения (1) к виду (4):

6. Выделив полные квадраты по переменным $y_1, \ldots, y_n$ в уравнении (4), записать каноническое уравнение смещенной кривой и построить ее в старой системе координат.