

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Линейная алгебра
Модуль 2. Линейные операторы
в евклидовом пространстве. Квадратичные формы
Лекция 2.1

к.ф.-м.н. Емгушева Г.П.



Сопряженные и самосопряженные операторы



Сопряженные и самосопряженные операторы

Пусть E - конечномерное евклидово пространство.



Сопряженные и самосопряженные операторы

Пусть E - конечномерное евклидово пространство.

Определение

Оператор $\mathbb{A}^* : E \rightarrow E$ называется

сопряженным линейному оператору

$\mathbb{A} : E \rightarrow E$, если для любых векторов $x, y \in E$ выполняется равенство $(\mathbb{A}x, y) = (x, \mathbb{A}^*y)$.



Сопряженные и самосопряженные операторы

Утверждение

Оператор \mathbb{A}^* , сопряженный линейному оператору \mathbb{A} , является линейным.



Сопряженные и самосопряженные операторы

Теорема

Любому линейному оператору $\mathbb{A} : E \rightarrow E$ соответствует единственный сопряженный оператор $\mathbb{A}^* : E \rightarrow E$, причем матрицей сопряженного оператора \mathbb{A}^* в любом ортонормированном базисе $\{\mathbf{e}\}$ является транспонированная матрица исходного оператора \mathbb{A} в том же ортонормированном базисе $\{\mathbf{e}\}$: $A^* = A^T$.



Сопряженные и самосопряженные операторы

Свойства сопряженного оператора:



Сопряженные и самосопряженные операторы

Свойства сопряженного оператора:

1. $(\alpha A)^* = \alpha A^*, \alpha \in \mathbb{R}.$



Сопряженные и самосопряженные операторы

Свойства сопряженного оператора:

1. $(\alpha A)^* = \alpha A^*, \alpha \in R.$

2. $(A^*)^* = A.$



Сопряженные и самосопряженные операторы

Свойства сопряженного оператора:

1. $(\alpha A)^* = \alpha A^*, \alpha \in R.$

2. $(A^*)^* = A.$

3. $(A + B)^* = A^* + B^*.$



Сопряженные и самосопряженные операторы

Свойства сопряженного оператора:

1. $(\alpha A)^* = \alpha A^*, \alpha \in R.$

2. $(A^*)^* = A.$

3. $(A + B)^* = A^* + B^*.$

4. $(AB)^* = B^*A^*.$



Сопряженные и самосопряженные операторы

Свойства сопряженного оператора:

1. $(\alpha A)^* = \alpha A^*, \alpha \in R.$

2. $(A^*)^* = A.$

3. $(A + B)^* = A^* + B^*.$

4. $(AB)^* = B^*A^*.$

5. Если линейный оператор A невырожден, то сопряженный с ним оператор A^* также невырожден и выполняется равенство

$$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}.$$



Определение

Линейный оператор $\mathbb{A} : E \rightarrow E$ называется **самосопряженным** (или **симметрическим**), если $\mathbb{A}^* = \mathbb{A}$, то есть для любых векторов $x, y \in E$ выполняется равенство $(\mathbb{A}x, y) = (x, \mathbb{A}y)$.



Сопряженные и самосопряженные операторы

Примеры



Сопряженные и самосопряженные операторы

Примеры

Самосопряженные операторы: \mathbb{O} – нулевой оператор, \mathbb{E} – единичный оператор.



Сопряженные и самосопряженные операторы

Свойства самосопряженного оператора:



Сопряженные и самосопряженные операторы

Свойства самосопряженного оператора:

1. Для того, чтобы линейный оператор \mathbb{A} был самосопряженным необходимо и достаточно, чтобы его матрица A в каком-либо ортонормированном базисе была симметрической, т.е. $A = A^T$.



Сопряженные и самосопряженные операторы

Свойства самосопряженного оператора:

1. Для того, чтобы линейный оператор \mathbb{A} был самосопряженным необходимо и достаточно, чтобы его матрица A в каком-либо ортонормированном базисе была симметрической, т.е. $A = A^T$.
2. Характеристическое уравнение самосопряженного оператора имеет только действительные корни.



Сопряженные и самосопряженные операторы

Свойства самосопряженного оператора:

3. Собственные векторы самосопряженного оператора \mathbb{A} , отвечающие разным собственным значениям, ортогональны.



Сопряженные и самосопряженные операторы

Свойства самосопряженного оператора:

4. Пусть \mathbb{A} - самосопряженный оператор n -мерного евклидова пространства E и $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – попарно различные собственные значения этого оператора. Тогда в E существует ортонормированный базис, в котором матрица этого линейного оператора имеет диагональный вид, а диагональные элементы такой матрицы – собственные значения.



Свойства самосопряженного оператора:

5. Для любого самосопряженного оператора \mathbb{A} существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора \mathbb{A} . Матрица линейного оператора \mathbb{A} в этом базисе имеет диагональный вид, на диагонали расположены собственные значения оператора \mathbb{A} , повторяющиеся столько раз, какова их кратность.



Сопряженные и самосопряженные операторы

Свойства самосопряженного оператора:

6. Если A – симметрическая матрица порядка n , то существует такая невырожденная матрица T порядка n , что $T^{-1}AT$ – диагональная матрица с диагональными элементами в виде собственных значений $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ матрицы A самосопряженного оператора \mathbb{A} .



Ортогональные матрицы и ортогональные операторы



Ортогональные матрицы и ортогональные операторы

Определение

Квадратную матрицу Q называют **ортогональной**, если она удовлетворяет условию

$$Q^T Q = Q Q^T = E, \quad (1)$$

где E - единичная матрица.



Ортогональные матрицы и ортогональные операторы

Примеры



Ортогональные матрицы и ортогональные операторы

Примеры

1) Простейшей ортогональной матрицей является единичная матрица E , так как $E^T E = E E^T = E$.



Ортогональные матрицы и ортогональные операторы

Примеры

1) Простейшей ортогональной матрицей является единичная матрица E , так как $E^T E = E E^T = E$. Напротив, нулевая матрица не является ортогональной: $O^T O = O \neq E$.



Ортогональные матрицы и ортогональные операторы

Примеры

2) Матрица $U = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

ортогональная.



Ортогональные матрицы и ортогональные операторы

Примеры

2) Матрица $U = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

ортогональная. Матрица U является матрицей линейного оператора поворота вектора на фиксированный угол φ против часовой стрелки в базисе $\{i, j\}$.



Ортогональные матрицы и ортогональные операторы

Свойства ортогональных матриц



Ортогональные матрицы и ортогональные операторы

Свойства ортогональных матриц

1. Определитель ортогональной матрицы Q может иметь одно из двух возможных значений: $\det Q = +1$ или $\det Q = -1$.



Ортогональные матрицы и ортогональные операторы

Свойства ортогональных матриц

1. Определитель ортогональной матрицы Q может иметь одно из двух возможных значений: $\det Q = +1$ или $\det Q = -1$.
2. Матрица, обратная к ортогональной матрице Q , совпадает с ее транспонированной матрицей, то есть $Q^{-1} = Q^T$.



Ортогональные матрицы и ортогональные операторы

Свойства ортогональных матриц

3. Матрица, транспонированная к ортогональной матрице, тоже является ортогональной.



Ортогональные матрицы и ортогональные операторы

Свойства ортогональных матриц

3. Матрица, транспонированная к ортогональной матрице, тоже является ортогональной.
4. Произведение двух ортогональных матриц Q и U одного порядка является ортогональной матрицей.



Ортогональные матрицы и ортогональные операторы

Свойства ортогональных матриц

5. Матрица, обратная к ортогональной матрице, тоже является ортогональной.



Ортогональные матрицы и ортогональные операторы

Определение

Линейный оператор $\mathbb{A} : E \rightarrow E$ евклидова пространства E называется **ортогональным оператором** (или **ортогональным преобразованием**), если он сохраняет скалярное произведение в E , то есть $\forall x, y \in E$ выполняется равенство: $(\mathbb{A}x, \mathbb{A}y) = (x, y)$.



Ортогональные матрицы и ортогональные операторы

Замечание

Ортогональный оператор сохраняет норму элементов евклидова пространства и угол между ними.



Ортогональные матрицы и ортогональные операторы

Теорема 1.

Если линейный оператор $\mathbb{A} : E \rightarrow E$ сохраняет норму в E , то есть $\|\mathbb{A}x\| = \|x\| \quad \forall x \in E$, то этот оператор ортогональный.



Ортогональные матрицы и ортогональные операторы

Пример

В пространствах V_2 , V_3 линейный оператор поворота вектора на фиксированный угол является ортогональным, так как при повороте длины векторов не изменяются.



Ортогональные матрицы и ортогональные операторы

Теорема 2.

Оператор $\mathbb{A} : E \rightarrow E$ является ортогональным тогда и только тогда, когда он переводит любой ортонормированный базис в ортонормированный базис.



Ортогональные матрицы и ортогональные операторы

Теорема 3.

Матрица ортогонального оператора в любом ортонормированном базисе ортогональна, и наоборот. Если матрица линейного оператора в некотором ортонормированном базисе ортогональна, то этот оператор является ортогональным.



Ортогональные матрицы и ортогональные операторы

Теорема 4.

Матрица U является матрицей перехода от одного ортонормированного базиса конечномерного евклидова пространства к другому ортонормированному базису того же пространства тогда и только тогда, когда матрица U является ортогональной.



Ортогональные матрицы и ортогональные операторы

Утверждение

Оператор, обратный к ортогональному, тоже является ортогональным.



Ортогональные матрицы и ортогональные операторы

Замечания:



Ортогональные матрицы и ортогональные операторы

Замечания:

1. Сумма ортогональных операторов в общем случае не является ортогональным оператором.



Ортогональные матрицы и ортогональные операторы

Замечания:

1. Сумма ортогональных операторов в общем случае не является ортогональным оператором.
2. Произведение ортогональных операторов есть ортогональный оператор.



Ортогональные матрицы и ортогональные операторы

Замечания:

1. Сумма ортогональных операторов в общем случае не является ортогональным оператором.
2. Произведение ортогональных операторов есть ортогональный оператор.
3. Корни характеристического уравнения ортогонального оператора равны ± 1 .



Диагонализация симметрической матрицы ортогональным преобразованием



Диагонализация симметрической матрицы ортогональным преобразованием

Рассмотрим произвольное евклидово пространство E .



Диагонализация симметрической матрицы ортогональным преобразованием

Рассмотрим произвольное евклидово пространство E . Пусть A_e и A_f - матрицы линейного оператора $\mathbb{A} : E \rightarrow E$ в базисах $\{e\}$ и $\{f\}$ соответственно.



Диагонализация симметрической матрицы ортогональным преобразованием

Рассмотрим произвольное евклидово пространство E . Пусть A_e и A_f - матрицы линейного оператора $\mathbb{A} : E \rightarrow E$ в базисах $\{e\}$ и $\{f\}$ соответственно. Они связаны соотношением:

$$A_f = T_{e \rightarrow f}^{-1} \cdot A_e \cdot T_{e \rightarrow f}, \quad (2)$$



Диагонализация симметрической матрицы ортогональным преобразованием

Рассмотрим произвольное евклидово пространство E . Пусть A_e и A_f - матрицы линейного оператора $\mathbb{A} : E \rightarrow E$ в базисах $\{e\}$ и $\{f\}$ соответственно. Они связаны соотношением:

$$A_f = T_{e \rightarrow f}^{-1} \cdot A_e \cdot T_{e \rightarrow f}, \quad (2)$$

где $T_{e \rightarrow f}$ - матрица перехода от базиса $\{e\}$ к базису $\{f\}$.



Диагонализация симметрической матрицы ортогональным преобразованием

Если базисы $\{e\}$ и $\{f\}$ являются ортонормированными, то матрица $T_{e \rightarrow f}$ является ортогональной, т.е. $T_{e \rightarrow f}^{-1} = T_{e \rightarrow f}^T$.



Диагонализация симметрической матрицы ортогональным преобразованием

Если базисы $\{e\}$ и $\{f\}$ являются ортонормированными, то матрица $T_{e \rightarrow f}$ является ортогональной, т.е. $T_{e \rightarrow f}^{-1} = T_{e \rightarrow f}^T$. Тогда соотношение (2) можно записать в виде:

$$A_f = T_{e \rightarrow f}^T \cdot A_e \cdot T_{e \rightarrow f}, \quad (3)$$

- ортогональное преобразование матрицы A_e .



Диагонализация симметрической матрицы ортогональным преобразованием

Согласно свойству б самосопряженного оператора, если A – симметрическая матрица порядка n , то существует такая невырожденная матрица U порядка n , что $U^{-1}AU$ – диагональная матрица с диагональными элементами в виде собственных значений $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ матрицы A самосопряженного оператора \mathbb{A} .



Диагонализация симметрической матрицы ортогональным преобразованием

Теорема 5.

Для любой симметрической матрицы A существует такая ортогональная матрица U , что $U^T A U = \Lambda$, где $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ - диагональная матрица, диагональными элементами которой являются собственные значения матрицы A , повторяющиеся согласно их кратности.



Диагонализация симметрической матрицы ортогональным преобразованием

Таким образом, любую симметрическую матрицу ортогональным преобразованием можно привести к диагональному виду.



Диагонализация симметрической матрицы ортогональным преобразованием

*Схема ортогонального преобразования
симметрической матрицы A :*



Диагонализация симметрической матрицы ортогональным преобразованием

*Схема ортогонального преобразования
симметрической матрицы A :*

1) найти собственные значения матрицы A из
решения характеристического уравнения

$$|A - \lambda E| = 0;$$



Диагонализация симметрической матрицы ортогональным преобразованием

*Схема ортогонального преобразования
симметрической матрицы A :*

2) для каждого собственного значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ найти набор собственных векторов из решения однородной СЛАУ $(A - \lambda E)X = 0$, соответствующих этому собственному значению,



Диагонализация симметрической матрицы ортогональным преобразованием

*Схема ортогонального преобразования
симметрической матрицы A :*

при этом эти собственные векторы должны
быть линейно независимыми и их количество
должно равняться кратности собственного
значения;



Диагонализация симметрической матрицы ортогональным преобразованием

*Схема ортогонального преобразования
симметрической матрицы A :*

3) преобразовать системы собственных векторов в ортонормированные при помощи процесса ортогонализации Грама – Шмидта. Объединить ортонормированные системы для каждого собственного значения в единую систему векторов,



Диагонализация симметрической матрицы ортогональным преобразованием

*Схема ортогонального преобразования
симметрической матрицы A :*
которая будет ортонормированным базисом
евклидова пространства;



Диагонализация симметрической матрицы ортогональным преобразованием

*Схема ортогонального преобразования
симметрической матрицы A :*

4) записать матрицу U , столбцами которой являются координаты векторов построенной ортонормированной системы;



Диагонализация симметрической матрицы ортогональным преобразованием

*Схема ортогонального преобразования
симметрической матрицы A :*

5) записать диагональную матрицу Λ ,
элементами главной диагонали которой
являются найденные собственные значения
матрицы A .

