Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Линейная алгебра

Модуль 1. Линейные и евклидовы пространства. Линейные операторы в линейном пространстве

Лекция 1.2

к.ф.-м.н. Емгушева Г.П.

Линейное подпространство

Линейное подпространство

Определение

Непустое множество L_1 линейного пространства L ($L_1 \subset L$) называется **линейным подпространством пространства** L , если выполняются условия:

1) $\forall x, y \in L_1 : (x + y) \in L_1$,

2) $\forall x \in L_1$ и $\forall \lambda \in R$: $\lambda x \in L_1$.

Линейное подпространство

Утверждение

Подмножество L_1, удовлетворяющее условиям данного определения, само является линейным пространством относительно операций сложения элементов и умножения на действительное число, действующих в L .

Линейное подпространство

Примеры линейных подпространств:

Линейное подпространство

Примеры линейных подпространств:

1. В любом линейном пространстве L всегда имеются два линейных подпространства: само пространство L и нулевое подпространство, состоящее из одного нулевого элемента θ . Эти подпространства называются **несобственными**. Все остальные линейные пространства называются **собственными.**

Примеры линейных подпространств:

2. Множество всех свободных векторов, параллельных данной плоскости, образуют линейное подпространство пространства V_3 всех свободных векторов трехмерного пространства.

Линейное подпространство

Примеры линейных подпространств:

3. В линейном пространстве $M_n(R)$ всех квадратных матриц порядка n линейное подпространство образуют все симметрические матрицы.

Свойства линейного подпространства:

Свойства линейного подпространства:

1. Если $e_1, e_2, \ldots, e_k$ - элементы линейного пространства L_1, то любая их линейная комбинация $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_k e_k$ также является элементом L_1.

Линейное подпространство

Свойства линейного подпространства:

1. Если $e_1, e_2, \ldots, e_k$ - элементы линейного пространства L_1, то любая их линейная комбинация $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_k e_k$ также является элементом L_1.

2. Размерность любого подпространства линейного пространства не превосходит размерности самого пространства.

Линейная оболочка

Линейная оболочка

Определение

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_k$ - совокупность элементов линейного пространства L . **Линейной оболочкой элементов** $e_1, e_2, \ldots, e_k$ называется совокупность всех линейных комбинаций этих элементов, то есть множество

$$\left\{\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_k e_k | \lambda_i \in R, i = \overline{1, k}\right\}.$$

Линейная оболочка

Определение (продолжение)

При этом говорят, что линейная оболочка натянута на векторы $e_{1,} e_2, \ldots, e_k$.

Определение (продолжение)
При этом говорят, что линейная оболочка натянута на векторы $e_{1,} e_2, \ldots, e_k$.
Обозначение: $L\left(e_1, e_2, \ldots, e_k\right)$

Линейная оболочка

Свойства линейной оболочки:

Свойства линейной оболочки:

1. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_k$ - элементы линейного пространства. Тогда линейная оболочка $L(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ является линейным подпространством линейного пространства L .

Свойства линейной оболочки:

1. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_k$ - элементы линейного пространства. Тогда линейная оболочка $L\left(e_1, e_2, \ldots, e_k\right)$ является линейным подпространством линейного пространства L .

2. Линейная оболочка элементов $e_1, e_2, \ldots, e_k$ является наименьшим подпространством, содержащим эти элементы.

Свойства линейной оболочки:

1. Пусть $e_1, e_2, \dots, e_k$ - элементы линейного пространства. Тогда линейная оболочка $L(e_1, e_2, \dots, e_k)$ является линейным подпространством линейного пространства L .
2. Линейная оболочка элементов $e_1, e_2, \dots, e_k$ является наименьшим подпространством, содержащим эти элементы.
3. Любое линейное пространство является линейной оболочкой любого из своих базисов.

Свойства линейной оболочки:

4. Размерность линейной оболочки $L(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ равна максимальному числу линейно независимых элементов в системе e_1, e_2, ..., e_k . Если элементы e_1, e_2, ..., e_k линейно независимы, то размерность линейной оболочки $L(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ равна k, а сами элементы e_1, e_2, ..., e_k образуют базис линейной оболочки $L(e_1, e_2, \ldots, e_k)$.

Евклидово пространство

Евклидово пространство

Определение

Вещественное линейное пространство E называется **евклидовым пространством**, если в этом пространстве имеется правило, согласно которому любой паре векторов $x, y \in E$ ставится в соответствие действительное число, обозначаемое (x, y) и называемое **скалярным произведением.**

Определение (продолжение)

При этом выполняются **аксиомы скалярного произведения**:

Определение (продолжение)

При этом выполняются **аксиомы скалярного произведения**:

1. $(x, y) = (y, x)$ - коммутативность,

Определение (продолжение)

При этом выполняются **аксиомы скалярного произведения**:

1. $(x, y) = (y, x)$ - коммутативность,

2. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z) \forall z \in E$ - дистрибутивность,

Определение (продолжение)

При этом выполняются **аксиомы скалярного произведения**:

1. $(x, y) = (y, x)$ - коммутативность,
2. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z) \forall z \in E$ - дистрибутивность,
3. $(\lambda x, y) = \lambda (x, y) \forall \lambda \in R$ - ассоциативность,

Евклидово пространство

Определение (продолжение)

При этом выполняются **аксиомы скалярного произведения**:

1. $(x, y) = (y, x)$ - коммутативность,
2. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z) \forall z \in E$ - дистрибутивность,
3. $(\lambda x, y) = \lambda (x, y) \forall \lambda \in R$ - ассоциативность,
4. $(x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0 \iff x = 0$ – неотрицательность скалярного произведения.

Примеры евклидовых пространств:

Евклидово пространство

Примеры евклидовых пространств:

1. В линейных пространствах V_2 и V_3 любых свободных векторов на плоскости и в пространстве вводится скалярное произведение: $(x, y) = |x||y|cos\varphi$.

Евклидово пространство

Примеры евклидовых пространств:

1. В линейных пространствах V_2 и V_3 любых свободных векторов на плоскости и в пространстве вводится скалярное произведение: $(x, y) = |x||y|cos\varphi$.
2. В арифметическом линейном пространстве R^n скалярное произведение задается формулой $(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$.

Примеры евклидовых пространств:

3. В линейном пространстве $C[a,b]$ всех функций, непрерывных на $[a,b]$, скалярное произведение задается формулой

$$(x(t), y(t)) = \int_a^b x(t)\, y(t)\, dt\ .$$

Замечание

В одном и том же линейном пространстве скалярное произведение можно задать разными способами.

Теорема (неравенство Коши-Буняковского)

Теорема (неравенство Коши-Буняковского)
Для любых векторов $x, y \in E$ справедливо неравенство Коши-Буняковского:

$$(x, y)^2 \le (x, x) \cdot (y, y)$$

Евклидово пространство

Следствия:

Следствия:

1. Неравенство Коши-Буняковского в R^n (или **неравенство Коши**):

Следствия:

1. Неравенство Коши-Буняковского в R^n (или **неравенство Коши**):

$$(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n)^2 \leq$$

$$\leq \left(x_1^2 + \ldots + x_n^2\right)\left(y_1^2 + \ldots + y_n^2\right).$$

Евклидово пространство

Следствия:

2. Неравенство Коши-Буняковского в $C\,[a, b]$ (или **неравенство Шварца**):

Следствия:

2. Неравенство Коши-Буняковского в $C\,[a,b]$ (или **неравенство Шварца**):

$$\left(\int_a^b x\,(t)\,y\,(t)\,dt\right)^2 \leq$$

$$\leq \int_a^b x^2\,(t)\,dt \cdot \int_a^b y^2\,(t)\,dt.$$

Следствия:

3. Неравенство Коши-Буняковского в V_2 и V_3:

Евклидово пространство

Следствия:

3. Неравенство Коши-Буняковского в V_2 и V_3:
$(x, y)^2 \leq |x| \cdot |y|$.

Нормированное пространство

Нормированное пространство

Обобщением понятия длины свободного вектора является норма.

Нормированное пространство

Определение

Правило, заданное на линейном пространстве L, которое каждому вектору $x \in L$ ставит в соответствие действительное число, обозначаемое $\|x\|$, называется **нормой**, если оно удовлетворяет **аксиомам нормы**:

Определение

Правило, заданное на линейном пространстве L, которое каждому вектору $x \in L$ ставит в соответствие действительное число, обозначаемое $\|x\|$, называется **нормой**, если оно удовлетворяет **аксиомам нормы**:

1. $\|x\| \geq 0$, причем $\|x\| = 0 \iff x = 0$,

Нормированное пространство

Определение

Правило, заданное на линейном пространстве L, которое каждому вектору $x \in L$ ставит в соответствие действительное число, обозначаемое $\|x\|$, называется **нормой**, если оно удовлетворяет **аксиомам нормы**:

1. $\|x\| \geq 0$, причем $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$,
2. $\|\lambda x\| = \lambda \|x\| \; \forall \lambda \in R$,

Нормированное пространство

Определение

Правило, заданное на линейном пространстве L, которое каждому вектору $x \in L$ ставит в соответствие действительное число, обозначаемое $\|x\|$, называется **нормой**, если оно удовлетворяет **аксиомам нормы**:

1. $\|x\| \geq 0$, причем $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$,
2. $\|\lambda x\| = \lambda \|x\| \ \forall \lambda \in R$,
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ - **неравенство треугольника**.

Нормированное пространство

Определение

Линейное пространство, в котором задана норма, называется **нормированным пространством.**

Теорема

Любое евклидово пространство является нормированным, если норма определяется равенством

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}$$

Нормированное пространство

Примеры:

Нормированное пространство

Примеры:

1. В евклидовых пространствах V_2 и V_3:

$\|x\| = |x|$.

Примеры:

1. В евклидовых пространствах V_2 и V_3:
$\|x\| = |x|$.
2. В евклидовом пространстве R^n:
$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$.

Нормированное пространство

Примеры:

1. В евклидовых пространствах V_2 и V_3:
$\|x\| = |x|$.
2. В евклидовом пространстве R^n:
$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$.
3. В евклидовом пространстве $C\,[a, b]$:
$\|x\| = \sqrt{\int_a^b x^2\,(t)\,dt}$.

Замечание 1

Используя норму, неравенство Коши-Буняковского можно записать в виде

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Замечание 2

Угол φ между векторами x и y можно определить из равенства

$$\boldsymbol{cos}\varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|} = \frac{(x, y)}{\sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)}}$$

Ортогональные вектора

Ортогональные вектора

Определение

Два ненулевых вектора евклидова пространства $x, y \in E$ называются **ортогональными**, если их скалярное произведение равно нулю, то есть $(x, y) = 0$.

Определение

Система ненулевых элементов $x_1, \ldots, x_n$ евклидова пространства называется **ортогональной системой**, если любые два элемента этой системы ортогональны, то есть $(x_i, x_j) = 0, i \neq j, i, j = \overline{1, n}$.

Ортогональные вектора

Определение

Система ненулевых элементов $x_1, \ldots, x_n$ евклидова пространства называется **ортонормированной системой**, если любые элементы этой системы попарно ортогональны и норма каждого элемента равна 1, то есть

$$(x_i, x_j) = \begin{cases} 0, i \neq j, \\ 1, i = j, \end{cases}$$

Ортогональные вектора

Теорема

Любая ортогональная (ортонормированная) система ненулевых элементов линейно независима.

Ортогональные вектора

Следствие

В n-мерном евклидовом пространстве любая ортогональная (ортонормированная) система из n элементов образует базис.