Математический анализ
Модуль 4. Функции нескольких переменных
Лекция 4.4

Аннотация

Векторная функция скалярного аргумента, ее предел и производная. Векторная функция постоянной длины.

1 Векторная функция скалярного аргумента

Определение

Векторной функцией скалярного аргумента называется функция, значениями которой являются векторы, а аргументами - числа.

Обозначение: $\overline{r}(t)$

Векторная функция задается с помощью трех скалярных функций, являющихся ее координатами:

$\overline{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

Если $z(t) = 0\ \forall t$, то пишут:

$\overline{r}(t) = (x(t), y(t))$.

Определение

Пусть векторы $\overline{r}(t)$ при всех значениях аргумента t приложены к одной точке O. Линия, описываемая в пространстве концом вектора $\overline{r}(t)$ при непрерывном изменении t, называется **годографом** функции $\overline{r}(t)$.

Поместим начало декартовой системы координат в точку O. Тогда в этой системе координат годограф задается системой уравнений:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad \text{- в пространстве}$$

или

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad \text{- на плоскости,}$$

где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ - координаты векторной функции $\overline{r}(t)$

2 Предел и непрерывность

Определение

Вектор $\overline{a}$ называется **пределом** векторной функции $\overline{r}(t)$ при $t \to t_0$, если

$$\lim_{t\to t_0} |\overline{r}(t) - \overline{a}| = 0.$$

Обозначение:

$$\lim_{t\to t_0} \overline{r}(t) = \overline{a}.$$

Здесь $|\overline{r}(t) - \overline{a}|$ - модуль вектора,

$$|\overline{r}(t) - \overline{a}| = \sqrt{(x(t) - a_x)^2 + (y(t) - a_y)^2 + (z(t) - a_z)^2}$$

Теорема (о пределе в координатной форме)

$$\lim_{t\to t_0} \overline{r}(t) = \overline{a} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \lim\limits_{t\to t_0} x(t) = a_x \\ \lim\limits_{t\to t_0} y(t) = a_y \\ \lim\limits_{t\to t_0} z(t) = a_z \end{array}$$

Определение

Векторная функция $\overline{r}(t)$ называется **непрерывной** в точке t_0, если

$$\lim_{t \to t_0} \overline{r}(t) = \overline{r}(t_0).$$

Теорема (о непрерывности в координатной форме)

$$\overline{r}(t) \in C(t_0) \Leftrightarrow \begin{array}{l} x(t) \in C(t_0) \\ y(t) \in C(t_0) \\ z(t) \in C(t_0) \end{array}$$

Свойства пределов векторных функций:

1) если $\lim\limits_{t \to t_0} \overline{r}(t) = \overline{a}$, то $\lim\limits_{t \to t_0} |\overline{r}(t)| = |\overline{a}|$,
2) $\lim\limits_{t \to t_0} (\overline{r}_1(t) + \overline{r}_2(t)) = \lim\limits_{t \to t_0} \overline{r}_1(t) + \lim\limits_{t \to t_0} \overline{r}_2(t)$,
3) $\lim\limits_{t \to t_0} f(t)\overline{r}(t) = \lim\limits_{t \to t_0} f(t) \lim\limits_{t \to t_0} \overline{r}(t)$,
4) $\lim\limits_{t \to t_0} (\overline{r}_1(t) \cdot \overline{r}_2(t)) = \lim\limits_{t \to t_0} \overline{r}_1(t) \cdot \lim\limits_{t \to t_0} \overline{r}_2(t)$,
5) $\lim\limits_{t \to t_0} (\overline{r}_1(t) \times \overline{r}_2(t)) = \lim\limits_{t \to t_0} \overline{r}_1(t) \times \lim\limits_{t \to t_0} \overline{r}_2(t)$

Здесь $\cdot$ - скалярное произведение и $\times$ - вектороное произведение.

3 Производная векторной функции

Определение

Производной функции $\overline{r}(t)$ в точке t_0 называется предел

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{r}(t_0 + \Delta t) - \overline{r}(t_0)}{\Delta t}$$

Обозначение: $\overline{r}'(t_0)$.

Теорема (о существовании производной векторной функции)

$$\exists \overline{r}'(t_0) \Leftrightarrow \exists x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0),$$

причем $\overline{r}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$

4 Геометрический смысл производной

Производная $\overline{r}'(t)$ - это вектор, направленный по касательной к годографу функции $\overline{r}(t)$ в сторону возрастания параметра t.

5 Физический смысл производной

Производная $\overline{r}'(t)$ - это вектор мгновенной скорости перемещения материальной точки по траектории, являющейся годографом функции $\overline{r}(t)$.

6 Уравнение касательной к пространственной кривой

Так как $\overline{r}'(t)$ направлен по касательной к годографу функции $\overline{r}(t)$, то уравнение касательной к этой кривой в точке $(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ имеет вид:

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}$$

7 Правила дифференцирования

1) $(\overline{r}_1 + \overline{r}_2)' = \overline{r}_1' + \overline{r}_2'$
2) $(f\overline{r})' = f'\overline{r} + f\overline{r}'$

3) $(\overline{r}_1 \cdot \overline{r}_2)' = \overline{r}_1' \cdot \overline{r}_2 + \overline{r}_1 \cdot \overline{r}_2'$
4) $(\overline{r}_1 \times \overline{r}_2)' = \overline{r}_1' \times \overline{r}_2 + \overline{r}_1 \times \overline{r}_2'$

8 Векторная функция постоянной длины

Теорема (о производной векторной функции постоянной длины)
Если длина вектора $\overline{r}(t)$ постоянна, то он ортогонален своей производной и $\overline{r}(t) \cdot \overline{r}'(t) = 0$.

Геометрически конец вектора $\overline{r}(t)$ все время лежит на одной и той же сфере с центром в точке O, сам же он служит радиус-вектором этой сферы. Производная от этого вектора направлена по касательной к сфере. На плоскости сфера переходит в круг.