Математический анализ
Модуль 4. Функции нескольких переменных
Лекция 4.3

Аннотация

Формула Тейлора. Экстремум функции нескольких переменных. Необходимое условие. Достаточные условия по второму дифференциалу и угловым минорам. Пошаговые алгоритмы поиска точек экстремума для функций двух и трех переменных.

1 Формула Тейлора

Теорема (формула Тейлора)

Пусть функция $y = f(x)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ определена и непрерывна вместе со всеми своими частными производными до порядка m включительно в окрестности точки a. Тогда справедлива **формула Тейлора m-ого порядка**

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!}df(a) + \frac{1}{2!}d^2f(a) + ... + \frac{1}{m!}d^mf(a) + r_m.$$

Определение

Многочлен $P_m(x) = \sum\limits_{i=0}^{m} \frac{1}{i!}d^if(a)$ называется **многочленом Тейлора степени m**.

Определение

Величина $r_m = f(x) - P_m(x)$ называется **остаточным членом** формулы Тейлора.

Остаточный член r_m можно записать в форме Пеано

$$r_m = \circ(\rho^m), \text{ где } \rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2}.$$

$d^i f(a)$ - дифференциал функции $f(x)$ порядка i в точке a. Считается, что $d^0 f(a) = f(a)$, $0! = 1$.

Формула Тейлора 2-ого порядка функции 2-х переменных $u = f(x, y)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} f(x,y) = f(a_x, a_y) &+ \frac{\partial f(a_x, a_y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(a_x, a_y)}{\partial y}\Delta y + \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f(a_x, a_y)}{\partial x^2}\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f(a_x, a_y)}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f(a_x, a_y)}{\partial y^2}\Delta y^2\right) + \\ &+ \circ(\rho^2), \rho \to 0, \end{aligned}$$

где $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}, \Delta x = x - a_x, \Delta y = y - a_y$.

2 Экстремум ФНП

Определение

Точка a называется **точкой строгого максимума (минимума)** функции $f(x)$, если $\exists U(a)\, \forall x \in U(a), x \neq a$: $f(x) < f(a)$ $(f(x) > f(a))$.

Определение

Точки строгого максимума и минимума называются **точками строгого экстремума**.

Определение

Точка называется **стационарной точкой** функции $f(x)$, если функция $f(x)$ дифференцируема в этой точке, и все ее частные производные 1-ого порядка равны нулю в этой же точке.

Теорема (необходимое условие строгого экстремума)

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a, и точка a является точкой строгого максимума (минимума) функции $f(x)$. Если в точке a существуют частные производные 1-ого порядка, то они равны нулю:

$$\frac{\partial f(a)}{\partial x_i} = 0, i = \overline{1, n}.$$

Теорема (достаточное условие строгого экстремума по второму дифференциалу)

Пусть функция $f(x)$ определена и имеет непрерывные частные производные 2-ого порядка в некоторой окрестности точки a, которая является стационарной точкой функции $f(x)$. Тогда
1) если квадратичная форма $d^2 f$ положительна определена, т.е.

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j > 0 \text{ при } dx_1^2 + ... + dx_n^2 > 0,$$

то a - точка строгого минимума,
2) если квадратичная форма $d^2 f$ отрицательно определена, т.е.

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j < 0 \text{ при } dx_1^2 + ... + dx_n^2 > 0,$$

то a - точка строгого максимума,
3) если квадратичная форма $d^2 f$ знакопеременна, то a не является точкой локального экстремума.

Определение

Матрицей Гессе D^2f называется матрица вторых частных производных функции $f(x)$:

$$D^2f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Определение

Угловыми минорами матрицы Гессе называются определители вида

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix},\ \ldots,\ \Delta_n = det(D^2 f).$$

Теорема (достаточное условие строгого экстремума по угловым минорам)

Пусть $f(x)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно в окрестности точки a, которая является стационарной точкой функции $f(x)$. Тогда

1) если $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$, то a - точка строгого минимума,

2) если $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \ldots$, то a - точка строгого максимума,

3) если D^2f невырождена и не выполняются условия (1) и (2), то a не является точкой локального экстремума,

4) если D^2f вырождена, то что-либо о точке a сказать нельзя.

Алгоритм поиска точек экстремума для функции двух переменных $u = f(x, y)$

1. Используя необходимое условие, находим стационарные точки.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow M_1, M_2, ...$$

2. Для каждой стационарной точки составляем матрицу Гессе.

$$D^2 f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

3. Для каждой матрицы Гессе вычисляем угловые миноры.

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

4. Используя достаточное условие строгого экстремума по угловым минорам, определяем точки локального экстремума.

а) $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$ - точка минимума

б) $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$ - точка максимума

в) $\Delta_2 < 0$ - точка не является точкой экстремума

г) $\Delta_2 = 0$ - что-либо о точке сказать нельзя

Алгоритм поиска точек экстремума
для функции трех переменных $u = f(x, y, z)$

1. Используя необходимое условие, находим стационарные точки.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow M_1, M_2, ... \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

2. Для каждой стационарной точки составляем матрицу Гессе.

$$D^2 f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

3. Для каждой матрицы Гессе вычисляем угловые миноры.

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}, \Delta_3 = det(D^2 f)$$

4. Используя достаточное условие строгого экстремума по угловым минорам, определяем точки локального экстремума.

а) $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$ - точка минимума

б) $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$ - точка максимума

в) $\Delta_3 \neq 0$, но условия (а) и (б) не выполняются - точка не является точкой экстремума

г) $\Delta_3 = 0$ - что-либо о точке сказать нельзя