

Математический анализ

Модуль 4. Функции нескольких переменных

Лекция 4.2

Аннотация

Производная сложной функции (3 теоремы и наиболее распространенные частные случаи). Инвариантность формы первого дифференциала. Приближенные вычисления. Дифференциалы высших порядков. Задача о полном дифференциале.

1 Производная сложной функции

Теорема №1

Пусть функции одного переменного $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы в точке t_0 и $a_x = x(t_0)$, $a_y = y(t_0)$. Если функция двух переменных $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (a_x, a_y) , то сложная функция $z = f(x(t), y(t))$ определена в некоторой окрестности точки t_0 и имеет в этой точке производную

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Теорема №2

Пусть функции двух переменных $x = x(u, v)$ и $y = y(u, v)$ непрерывны в точке (u_0, v_0) и имеют в ней частные производные

$$\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v},$$

а функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (a_x, a_y) , где $a_x = x(u_0, v_0)$, $a_y = y(u_0, v_0)$. Тогда в точке (u_0, v_0) существуют частные производные сложной функции $z = f(x(u, v), y(u, v))$, причем

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Теорема №3

Пусть функции k переменных $x_i = x_i(t)$, $t = (t_1, t_2, \dots, t_k)$, $i = 1, 2, \dots, n$ непрерывны в точке $t^{(0)} = (t_1^{(0)}, t_2^{(0)}, \dots, t_k^{(0)})$ и имеют в ней частные производные

$$\frac{\partial x_i}{\partial t_j},$$

а функция $y = y(x)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ дифференцируема в точке $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, где $a_i = x_i(t^{(0)})$, $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда в точке $t^{(0)}$ сложная функция $y = y(x(t))$ имеет частные производные

$$\frac{\partial y}{\partial t_j} = \frac{\partial y}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \frac{\partial y}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_j} + \dots + \frac{\partial y}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_j}, j = 1, 2, \dots, k.$$

Наиболее часто встречающиеся на практике сложные функции и их производные:

$$1) z = f(x, y), x = x(t), y = y(t)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$2) z = f(t, x, y), x = x(t), y = y(t)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Здесь $\frac{dz}{dt}$ - полная производная функции z по переменной t , которая учитывает, что x и y - это некоторые функции от t , а $\frac{\partial z}{\partial t}$ - частная производная функции z по переменной t в предположении, что x и y - это независимые переменные.

$$3) z = f(x, y), x = x(u, v), y = y(u, v)$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}.$$

2 Инвариантность формы дифференциала первого порядка

Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$, где $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. Здесь u, v - независимые переменные, x, y - промежуточные переменные. Тогда по определению дифференциала имеем

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv = \\ &= \left(\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \right) du + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \right) dv = \\ &= \frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) + \frac{\partial z}{\partial y} \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right) = \\ &= \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \end{aligned}$$

Получаем

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Свойство инвариантности означает, что форма дифференциала не зависит от того, для каких переменных (промежуточных или независимых) он выписан.

3 Приближенные вычисления

Пусть необходимо вычислить значение функции f в точке (x, y) , при этом известно значение функции f в точке (a_x, a_y) .

Для дифференцируемой функции имеем:

$$f(x, y) - f(a_x, a_y) = df(a_x, a_y) + o(\rho),$$

где $\rho = \sqrt{(x - a_x)^2 + (y - a_y)^2}$.

Отбросив $o(\rho)$, получаем

$$f(x, y) - f(a_x, a_y) \approx df(a_x, a_y)$$

или

$$\begin{aligned} f(x, y) &\approx f(a_x, a_y) + df(a_x, a_y) = \\ &= f(a_x, a_y) + \frac{\partial f(a_x, a_y)}{\partial x} (x - a_x) + \frac{\partial f(a_x, a_y)}{\partial y} (y - a_y). \end{aligned}$$

4 Дифференциалы высших порядков

Определение

Вторым дифференциалом функции $f(x)$ называется квадратичная форма

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j.$$

Обозначение: $d^2 f$.

Определение

Дифференциалом порядка n функции $f(x)$ называется дифференциал от дифференциала порядка $(n - 1)$.

Обозначение: $d^n f = d(d^{n-1} f)$.

Частные случаи:

1) $u = f(x, y)$

дифференциал первого порядка:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy,$$

дифференциал второго порядка:

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2,$$

дифференциал третьего порядка:

$$d^3 f = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} dy^3,$$

2) $u = f(x, y, z)$

дифференциал первого порядка:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz,$$

дифференциал второго порядка:

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} dz^2 + \\ + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} dx dz + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} dy dz.$$

Получим выражение второго дифференциала $d^2 f$ для функции 2-х переменных $u = f(x, y)$.

$$d^2 f = d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy\right) = \\ = d\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx\right) + d\left(\frac{\partial f}{\partial y} dy\right) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \cdot dx + d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot dy = \\ = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dy\right) dx + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy\right) dy = \\ = \left|\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right| = \\ = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2.$$

5 Задача о полном дифференциале

Пусть дано выражение $w = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$. Величина w не всегда является дифференциалом какой-либо функции.

Теорема (необходимое условие полного дифференциала)

Если в области D выражение w является полным дифференциалом

лом некоторой функции, то

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Теорема (достаточное условие полного дифференциала)

Если в односвязной области D выполняется условие

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

то выражение w является полным дифференциалом.