Математический анализ
Модуль 3. Дифференциальное исчисление функций одной переменной
Лекция 3.1

Аннотация

Производная, ее геометрический смысл. Дифференцируемость функции. Свойства дифференцируемых функций. Дифференциал функции и его свойства.

1 Производная

Определение

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. **Производной** функции $f(x)$ в точке x_0 называется

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Обозначение: $f'(x_0)$, $\dfrac{df(x_0)}{dx}$.

Если

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \infty, +\infty, -\infty,$$

то говорят, что в точке x_0 существует **бесконечная производная**.

Определение

Правосторонней производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется

$$\lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Обозначение: $f'_+(x_0)$.

Определение

Левосторонней производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется

$$\lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Обозначение: $f'_-(x_0)$.

Определение

Правосторонняя и левосторонняя производные называются **односторонними производными**.

Теорема (о связи односторонних производных с двусторонней)

$\exists f'(x_0) = A \Leftrightarrow \exists f'_+(x_0) = A, f'_-(x_0) = A.$

Определение

Процесс нахождения производной называется **дифференцированием**.

2 Геометрический смысл производной

Пусть $f(x) \in C(x_0)$, $f'(x_0) \neq \infty$, M_0M_1 - некоторая секущая графика функции $y = f(x)$ с уравнением $y = k(x - x_0) + y_0$, где $k = \Delta f / \Delta x$, $y_0 = f(x_0)$ (см. рис. 1).

Устремив точку M_1 к точке M_0 при $\Delta x \to 0$, мы переведем секущую M_0M_1 в прямую (*), которая в окрестности точки x_0 будет иметь с графиком функции $f(x)$ только одну общую точку.

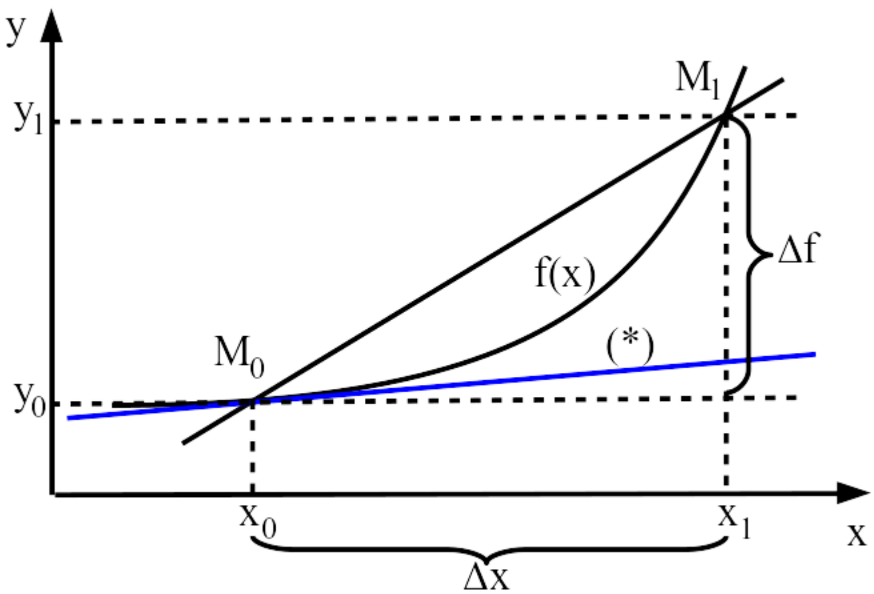

Рис. 1: Касательная

Определение

Предельное положение секущей M_0M_1 при $\Delta x \to 0$ называется **наклонной касательной** к графику функции $f(x)$ в точке x_0.

Так как по определению

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x},$$

то предельный переход в уравнении секущей при $\Delta x \to 0$ дает уравнение касательной:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$

Отсюда получаем геометрический смысл конечной производной: $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$, где α - угол наклона касательной.

3 Дифференцируемость функции

Определение

Функция $y = f(x)$ называется **дифференцируемой** в точке x_0, если ее приращение Δf в этой точке можно представить в виде:

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x), \Delta x \to 0,$$

где A - постоянная, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta f = f(x) - f(x_0)$.

Обозначение: $f(x) \in D(x_0)$ - функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0.

*Теорема (об эквивалентности дифференцируемости и существования производной)**

$$f(x) \in D(x_0) \Leftrightarrow \exists f'(x_0).$$

Доказательство

1) необходимость ($\Rightarrow$)
Дано: $f(x) \in D(x_0)$
Доказать: $\exists f'(x_0)$

$f(x) \in D(x_0) \Rightarrow \Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x)$, $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = A + \dfrac{\circ(\Delta x)}{\Delta x}$

$\Rightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = A + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\circ(\Delta x)}{\Delta x}$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = A \Rightarrow \exists f'(x_0) = A$.

2) достаточность ($\Leftarrow$)
Дано: $\exists f'(x_0)$
Доказать: $f(x) \in D(x_0)$

$\exists f'(x_0) \Rightarrow \exists \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

Пусть $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = A$.

По теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой
$\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x)$ - бесконечно малая при $\Delta x \to 0$.
Отсюда $\Delta f = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$.
$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$
$\Rightarrow \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x = \circ(\Delta x), \Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x)$
$\Rightarrow f(x) \in D(x_0)$.
■

*Теорема (о непрерывности дифференцируемой функции)**

$$f(x) \in D(x_0) \Rightarrow f(x) \in C(x_0).$$

Доказательство
$f(x) \in D(x_0) \Rightarrow \Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x)$
$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x)) = 0 \Rightarrow f(x) \in C(x_0)$.
■

4 Дифференциал функции

Пусть $f(x) \in D(x_0)$. Тогда $\Delta f = A\Delta x + \circ(\Delta x), \Delta x \to 0$.

Определение
Линейная функция $A\Delta x$ называется **дифференциалом** функции $f(x)$ в точке x_0.
Обозначение: $df(x_0)$

Ранее было показано, что $A = f'(x_0)$. В свою очередь приращение независимой переменной Δx часто обозначают как dx. Тогда

$$df(x_0) = f'(x_0)dx.$$

Пример:
$f(x) = 2^x, x_0 = 0,$
$f'(x) = 2^x \ln 2, f'(0) = \ln 2 \Rightarrow df(0) = \ln 2dx.$

5 Геометрический смысл дифференциала

Если Δf - это приращение функции, то df - это приращение ординаты касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 при изменении аргумента на Δx (см. рис. 2).

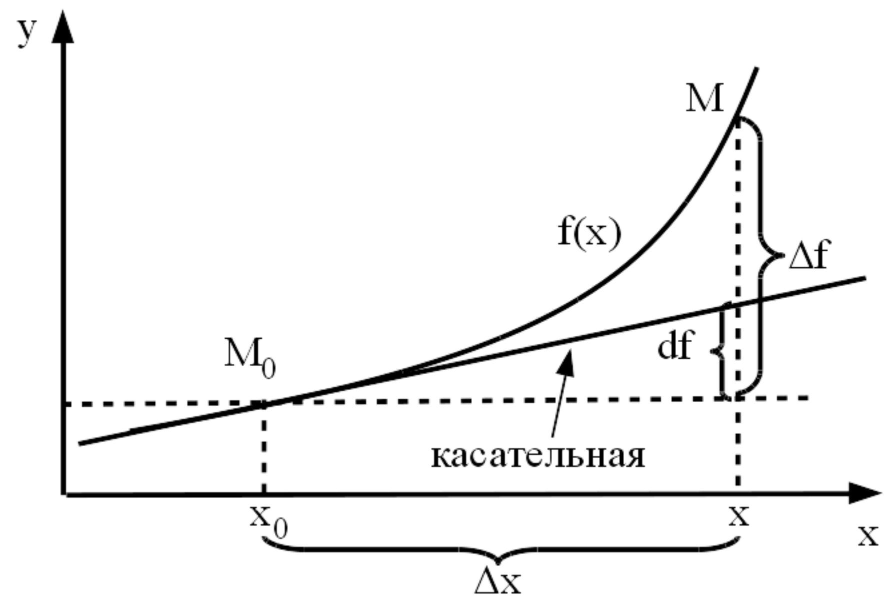

Рис. 2: Приращение Δf и дифференциал df функции

Поскольку
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f - df}{df} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\circ(\Delta x)}{f'(x_0)\Delta x} = 0,$$
то чем меньше приращение аргумента Δx, тем точнее дифференциал оценивает значение приращения функции.

6 Инвариантность формы первого дифференциала

$f(x) = u(v(x))$ - сложная функция,
v - промежуточная переменная,
x - независимая переменная,
$v_0 = v(x_0)$

$df(x_0) = f'(x_0)dx = u'(v_0)v'(x_0)dx = u'(v_0)dv$

Дифференциал первого порядка df выглядит одинаково, независимо от того, по какой переменной (независимой x или промежуточной v) он считается.