Линейная алгебра
Модуль 2. Линейные операторы в евклидовом пространстве. Квадратичные формы
Лекция 2.3

Аннотация

Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом ортогонального преобразования. Закон инерции квадратичных форм. Приведение уравнений кривых и поверхностей 2 порядка к каноническому виду.

1 Метод ортогонального преобразования

Пусть E - n-мерное евклидово пространство. При переходе от базиса $\{e\}$ к базису $\{f\}$ матрица квадратичной формы меняется по закону

$$A_f = T_{e\longrightarrow f}^T \cdot A_e \cdot T_{e\longrightarrow f},$$

где $T_{e\longrightarrow f}$ - матрица перехода от базиса $\{e\}$ к базису $\{f\}$. Так как матрица квадратичной формы является симметрической, то она может быть приведена ортогональным преобразованием к диагональному виду, то есть для матрицы A_e существует такая ортогональная матрица U $\left(U^{-1} = U^T\right)$, что $U^T A_e U = \Lambda$, где Λ - диагональная матрица, у которой на главной диагонали стоят собственные значения матрицы A, являющиеся решениями уравнения: $|A - \lambda E| = 0$. При этом матрица U является матрицей перехода от старого ортонормированного базиса к новому ортонормированному базису.

Квадратичная форма с матрицей

$$A_f = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

имеет канонический вид

$$f(x) = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2.$$

Ортонормированный базис $\{f\}$, состоящий из собственных векторов матрицы A_e (соответствующие собственным значениям), является каноническим базисом квадратичной формы.

2 Закон инерции квадратичных форм

Определение

Ранг матрицы квадратичной формы в любом базисе называется **рангом квадратичной формы.**

Теорема (закон инерции квадратичных форм)

Число слагаемых с положительными (отрицательными) каноническими коэффициентами в каноническом виде квадратичной формы не зависит от способа приведения квадратичной формы к каноническому виду.

Замечание

Ни канонический базис, ни канонический вид квадратичной формы не определяются однозначно.

Теорема (независимость ранга от выбора базиса)

Ранг квадратичной формы не меняется при невырожденных линейных преобразованиях и равен:

1) числу отличных от нуля канонических коэффициентов,

2) количеству ненулевых собственных значений матрицы квадратичной формы в любом базисе (с учетом их кратности).

3 Приведение уравнений кривых и поверхностей 2 порядка к каноническому виду

Рассмотрим $n-$ мерное вещественное евклидово пространство R^n. Пусть $\{e\}$ - ортонормированный базис в R^n. Рассмотрим геометрическое место точек $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ в этом базисе, удовлетворяющих уравнению

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^{n} b_ix_i + c = 0, \tag{1}$$

где c, a_{ij}, b_i - действительные коэффициенты, $a_{ij} = a_{ji}\ \forall i, j$, среди коэффициентов a_{ij} хотя бы один не равен нулю.

Замечание 1.

Уравнение (1) при $n = 2$ является уравнением кривой второго порядка на плоскости, при $n = 3$ - уравнением поверхности второго порядка в трехмерном пространстве.

Замечание 2.

Слагаемое $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ называется **группой старших членов** уравнения (1), группа слагаемых $\sum_{i=1}^{n} b_ix_i + c$ называется **линейной частью** уравнения (1).

Замечание 3.

Группа старших членов является квадратичной формой

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \tag{2}$$

с симметричной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

члены первого порядка образуют линейную форму

$$\sum_{i=1}^{n} b_i x_i$$

с матрицей-строкой

$$B = (b_1, \ldots, b_n).$$

Уравнение (1) в матричном виде -

$$X^T A X + BX + c = 0,$$

где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ – матрица-столбец переменных, c – свободный член.

Замечание 4. Типы кривых второго порядка (при n=2):

1. Если $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, то уравнение (1) определяет кривую **эллиптического типа**.

2. Если $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$, то уравнение (1) определяет кривую **гиперболического типа**.

3. Если $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ и $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$, то уравнение (1) определяет кривую **параболического типа**.

Приведение уравнения (1) к каноническому виду

Существует ортонормированный базис, состоящий из ортонормированных собственных векторов матрицы A, в котором квадратичная форма (2) имеет канонический вид $f(x_1, \ldots, x_n) = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$, где $\lambda_i, i = \overline{1, n}$, - собственные значения матрицы A, повторяющиеся столько раз, какова их кратность. Матрица перехода U от старого ортонормированного базиса $(x_1, \ldots, x_n)$ к новому ортонормированному базису $(y_1, \ldots, y_n)$ является ортогональной и состоит из координат ортонормированных собственных векторов матрицы A, отвечающих собственным значениям λ_i. Преобразование с матрицей U будет ортогональным.

Любую квадратичную форму ортогональным преобразованием можно привести к каноническому виду.

Сделаем замену переменных $X = UY$, тогда уравнение (1) примет вид:

$$(UY)^T A (UY) + B (UY) + c = 0$$

$$\Downarrow$$

$$Y^T \left(U^T A U\right) Y + (BU) Y + c = 0$$

$$\Downarrow$$

$$Y^T \Lambda Y + DY + c = 0, \tag{3}$$

где

$$\Lambda = U^T A U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

– матрица квадратичной формы в ортонормированном базисе $(y_1, \ldots, y_n)$, $D = BU$.

Уравнение (3) можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 + \sum_{i=1}^{n} d_i y_i + c = 0. \qquad (4)$$

Уравнение (4) проще уравнения (1), так как не содержит слагаемых вида $y_i y_j$ при $i \neq j$.

Замечание

Преобразованию координат $X = UY$ соответствует поворот осей Ox_1, ..., Ox_n на некоторый угол φ.

Алгоритм преобразования уравнения (1) к виду (4):

1. Найти собственные значения матрицы A из решения характеристического уравнения $det\,(A - \lambda E) = 0$.

2. Для каждого собственного значения найти соответствующий собственный вектор из решения однородной СЛАУ $(A - \lambda E)\,X = O$. Все собственные векторы должны быть попарно ортогональными, а их количество должно быть равно количеству собственных значений, учитывая их кратность.

3. Построить ортонормированную систему элементов (ортонормированный базис), пронормировав найденные собственные векторы.

4. Составить ортогональную матрицу перехода U, столбцы которой являются координатами этих собственных векторов. Так как система собственных векторов образует ортонормированный базис, то матрица U будет ортогональной.

5. Используя преобразование координат $X = UY$, записать уравнение (4).

6. Выделив полные квадраты по переменным $y_1, \ldots, y_n$ в уравнении (4), записать каноническое уравнение смещенной кривой и построить ее в старой системе координат.