Линейная алгебра
Модуль 2. Линейные операторы в евклидовом пространстве. Квадратичные формы
Лекция 2.2

Аннотация

Квадратичные формы. Знакоопределенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра. Квадратичная форма канонического вида. Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду.

1 Квадратичная форма

Определение

Квадратичной формой называется однородный многочлен второй степени от n переменных с действительными коэффициентами:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \tag{1}$$

где $a_{ij} = a_{ji}$ $\forall i, j = \overline{1, n}$.

Пример

$f(x_1, x_2) = 7x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2$ - квадратичная форма двух переменных.

Замечание

Так как $a_{ij} = a_{ji}$ $\forall i, j = \overline{1, n}$, то формулу (1) можно записать в виде

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \le i \le j \le n} a_{ij} x_i x_j.$$

Запись квадратичной формы в виде (1) называется **координатной формой** записи.

Определение

Симметрическая матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

составленная из коэффициентов квадратичной формы, называется **матрицей квадратичной формы.**

Утверждение

Квадратичную форму можно записать в **матричном виде**

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = X^T A X,$$

где X - столбец переменных, A - матрица квадратичной формы.

Задача 1. Записать квадратичную форму в матричном виде:

$f\left(x_1, x_2, x_3\right) = x_1^2 - 2x_2^2 + 4x_3^2 + 6x_1x_2 - 8x_2x_3$.

Решение. Так как a_{ii} – коэффициент при x_i^2, $a_{ij} + a_{ji} = 2a_{ij} = 2a_{ji}$ – коэффициенты при x_ix_j, то получим матрицу квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

Откуда

$$f\left(x_1, x_2, x_3\right) = X^T A X = \left(x_1, x_2, x_3\right) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Пусть дана матрица квадратичной формы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Записать квадратичную форму в виде многочлена (в координатной форме).
Решение. $f\left(x_1, x_2, x_3\right) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3.$

Замечание

Пусть L - $n-$мерное линейное пространство. Квадратичная форма – это отображение $f : L \to R$, сопоставляющее каждому элементу $x \in L$ с координатами $(x_1, \ldots, x_n)$ в некотором базисе $\{e\}$ действительное число $f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$.

Обозначим матрицу квадратичной формы в базисе $\{e\}$ через A_e.

Утверждение.

При переходе от базиса $\{e\}$ к базису $\{f\}$ матрица квадратичной формы A_f меняется по закону

$$A_f = T^T_{e \longrightarrow f} \cdot A_e \cdot T_{e \longrightarrow f},$$

где $T_{e \longrightarrow f}$ - матрица перехода от базиса $\{e\}$ к базису $\{f\}$.

Замечание

Изменение базиса в линейном пространстве L приводит к линейной замене переменных $X = T_{e \longrightarrow f} \cdot Y$ в квадратичной форме.

2 Знакоопределенные квадратичные формы

Определение

Квадратичная форма называется **положительно определенной** (**отрицательно определенной**), если для любого ненулевого элемента $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$ выполняется неравенство $f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$.

Замечание

Если же в данном определении вместо строгих неравенств выполняются нестрогие неравенства $f(x) \geq 0$ ($f(x) \leq 0$) и существует такой ненулевой элемент $x \in R^n$, что $f(x) = 0$, то квадратичная форма называется **неотрицательно определенной** (**неположительно определенной**).

Определение

Квадратичная форма называется **знакопеременной**, если существуют такие элементы $x, y \in R^n$, что $f(x) > 0$, а $f(y) < 0$.

Примеры:

1. Квадратичная форма $f(x) = f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 3x_2^2$ является положительно определенной.

2. Квадратичная форма $f(x) = f(x_1, x_2) = 3x_1^2$ является неотрицательно определенной, так как существует ненулевой элемент $x = (0; 1) \in R^2$ такой, что $f(x) = 0$.

3. Квадратичная форма $f(x) = f(x_1, x_2) = 3x_1^2 - x_2^2$ - знакопеременная, так как $f(1; 0) = 3 > 0$, а $f(0; 1) = -1 < 0$.

Пусть A - матрица квадратичной формы размера $n \times n$ в произвольном базисе. Рассмотрим угловые миноры A:

$$\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ \ldots,\ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Теорема (критерий Сильвестра)

Для того чтобы квадратичная форма n переменных была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все угловые миноры ее матрицы A в произвольном базисе были положительны, т.е. $\Delta_1 > 0; \Delta_2 > 0; \ldots; \Delta_n > 0$.

Следствие

Для того чтобы квадратичная форма n переменных была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы знаки угловых миноров ее матрицы A в произвольном базисе чередовались, начиная с минуса: $\Delta_1 < 0; \Delta_2 > 0; \ldots; (-1)^n\,\Delta_n > 0$.

Замечание

Из критерия Сильвестра вытекают условия, при которых невырожденная квадратичная форма будет знакопеременной (неопределенной). Это будет в том случае, когда для матрицы квадратичной формы выполняется хоты бы одно из трех условий:

1) один из угловых миноров равен нулю;
2) два угловых минора нечетного порядка имеют разные знаки;
3) один из угловых миноров четного порядка отрицателен.

3 Квадратичная форма канонического вида

Определение

Квадратичная форма $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2$, содержащая только квадраты переменных, называется **квадратичной формой**

канонического вида. Коэффициенты a_{ii} называются **каноническими коэффициентами**.

Замечание

Матрица квадратичной формы канонического вида является диагональной.

Теорема

Для любой квадратичной формы существует базис, в котором она имеет канонический вид.

Определение

Базис, в котором квадратичная форма имеет канонический вид, называется **каноническим базисом.**

Методы приведения квадратичной формы к каноническому виду:

1) метод Лагранжа,
2) метод ортогонального преобразования.

4 Метод Лагранжа

Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду состоит в последовательном выделении полных квадратов переменных.

Схема:

1. Пусть $a_{11} \neq 0 \Rightarrow$ вынесем за скобки a_{11} ; в скобке соберем все слагаемые, содержащие x_1, и дополним полученное выражение до полного квадрата. В результате получим

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11} \cdot \left(x_1 + \sum_{j=2}^{n} b_j x_j\right)^2 + f_1(x_2, \ldots, x_n)$,
где $f_1(x_2, \ldots, x_n)$ -квадратичная форма, не содержащая x_1.

2. Заменим $x_1 + \sum_{j=2}^{n} b_j x_j$ на y_1, получим $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11} y_1^2 + f_1(x_2, \ldots, x_n)$.

3. С квадратичной формой $f_1(x_2, \ldots, x_n)$ поступим аналогично.

Замечание 1.

Если $a_{11} = 0$, но $a_{ii} \neq 0$, $i \neq 1$, то необходимо выделять полный квадрат с переменной x_i.

Замечание 2.

Если $a_{ii} = 0, i = \overline{1, n}$, то необходимо выполнить промежуточную замену переменных. Пусть, например. $a_{12} \neq 0$, то есть существует $2a_{12}x_1x_2$. Сделаем замену переменных: $x_1 = y_1 + y_2$, $x_2 = y_1 - y_2$, $x_i = y_i, i = 3, 4, \ldots, n$. Тогда

$$2a_{12}x_1x_2 = 2a_{12}(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = 2a_{12}\left(y_1^2 - y_2^2\right).$$

После замены переменных получим квадратичную форму, у которой коэффициент при y_1^2 отличен от нуля.

