Линейная алгебра
Модуль 2. Линейные операторы в евклидовом пространстве. Квадратичные формы
Лекция 2.1

Аннотация

Сопряженные и самосопряженные операторы, их свойства и примеры. Ортогональная матрица и ортогональный оператор, их свойства и примеры. Диагонализация симметрической матрицы ортогональным преобразованием.

1 Сопряженные и самосопряженные операторы

Пусть E - конечномерное евклидово пространство.

Определение

Оператор $\mathbb{A}^* : E \to E$ называется **сопряженным** линейному оператору $\mathbb{A} : E \to E$, если для любых векторов $x, y \in E$ выполняется равенство $(\mathbb{A}x, y) = (x, \mathbb{A}^* y)$.

Утверждение

Оператор $\mathbb{A}^*$, сопряженный линейному оператору $\mathbb{A}$, является линейным.

Теорема

Любому линейному оператору $\mathbb{A} : E \to E$ соответствует единственный сопряженный оператор $\mathbb{A}^* : E \to E$, причем матрицей сопряженного оператора $\mathbb{A}^*$ в любом ортонормированном базисе $\{e\}$

является транспонированная матрица исходного оператора $\mathbb{A}$ в том же ортонормированном базисе $\{e\} : A^* = A^T$.

Свойства сопряженного оператора:

1. $(\alpha\mathbb{A})^* = \alpha\mathbb{A}^*, \alpha \in R$.
2. $(\mathbb{A}^*)^* = \mathbb{A}$.
3. $(\mathbb{A} + \mathbb{B})^* = \mathbb{A}^* + \mathbb{B}^*$.
4. $(\mathbb{A}\mathbb{B})^* = \mathbb{B}^*\mathbb{A}^*$.
5. Если линейный оператор $\mathbb{A}$ невырожден, то сопряженный с ним оператор $\mathbb{A}^*$ также невырожден и выполняется равенство $\left(\mathbb{A}^{-1}\right)^* = (\mathbb{A}^*)^{-1}$.

Определение

Линейный оператор $\mathbb{A} : E \to E$ называется **самосопряженным** (или **симметрическим**), если $\mathbb{A}^* = \mathbb{A}$, то есть для любых векторов $x, y \in E$ выполняется равенство $(\mathbb{A}x, y) = (x, \mathbb{A}y)$.

Примеры

Самосопряженные операторы: $\mathbb{O}$ – нулевой оператор, $\mathbb{E}$ - единичный оператор.

Свойства самосопряженного оператора:

1. Для того, чтобы линейный оператор $\mathbb{A}$ был самосопряженным необходимо и достаточно, чтобы его матрица A в каком-либо ортонормированном базисе была симметрической, т.е. $A = A^T$.

2. Характеристическое уравнение самосопряженного оператора имеет только действительные корни.

3. Собственные векторы самосопряженного оператора $\mathbb{A}$, отвечающие разным собственным значениям, ортогональны.

4. Пусть $\mathbb{A}$ - самосопряженный оператор n-мерного евклидова пространства E и $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – попарно различные собственные значения этого оператора. Тогда в E существует ортонормированный

базис, в котором матрица этого линейного оператора имеет диагональный вид, а диагональные элементы такой матрицы – собственные значения.

5. Для любого самосопряженного оператора $\mathbb{A}$ существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора $\mathbb{A}$. Матрица линейного оператора $\mathbb{A}$ в этом базисе имеет диагональный вид, на диагонали расположены собственные значения оператора $\mathbb{A}$, повторяющиеся столько раз, какова их кратность.

6. Если A – симметрическая матрица порядка n, то существует такая невырожденная матрица T порядка n, что $T^{-1}AT$ – диагональная матрица с диагональными элементами в виде собственных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы A самосопряженного оператора $\mathbb{A}$.

2 Ортогональные матрицы и ортогональные операторы

Определение

Квадратную матрицу Q называют **ортогональной**, если она удовлетворяет условию

$$Q^T Q = QQ^T = E, \tag{1}$$

где E - единичная матрица.

Примеры

1) Простейшей ортогональной матрицей является единичная матрица E, так как $E^T E = EE^T = E$. Напротив, нулевая матрица не является ортогональной: $O^T O = O \neq E$.

2) Матрица $U = \begin{pmatrix} cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix}$ ортогональная. Матрица U является матрицей линейного оператора поворота вектора на фиксированный угол φ против часовой стрелки в базисе $\{i, j\}$.

Свойства ортогональных матриц

1. Определитель ортогональной матрицы Q может иметь одно из двух возможных значений: $detQ = +1$ или $detQ = -1$.

2. Матрица, обратная к ортогональной матрице Q, совпадает с ее транспонированной матрицей, то есть $Q^{-1} = Q^T$.

3. Матрица, транспонированная к ортогональной матрице, тоже является ортогональной.

4. Произведение двух ортогональных матриц Q и U одного порядка является ортогональной матрицей.

5. Матрица, обратная к ортогональной матрице, тоже является ортогональной.

Определение

Линейный оператор $\mathbb{A} : E \to E$ евклидова пространства E называется **ортогональным оператором** (или **ортогональным преобразованием**), если он сохраняет скалярное произведение в E, то есть $\forall x, y \in E$ выполняется равенство: $(\mathbb{A}x, \mathbb{A}y) = (x, y)$.

Замечание

Ортогональный оператор сохраняет норму элементов евклидова пространства и угол между ними.

Теорема 1.

Если линейный оператор $\mathbb{A} : E \to E$ сохраняет норму в E, то есть $\|\mathbb{A}x\| = \|x\|$ $\forall x \in E$, то этот оператор ортогональный.

Пример

В пространствах V_2, V_3 линейный оператор поворота вектора на фиксированный угол является ортогональным, так как при повороте длины векторов не изменяются.

Теорема 2.

Оператор $\mathbb{A} : E \to E$ является ортогональным тогда и только тогда, когда он переводит любой ортонормированный базис в ортонормированный базис.

Теорема 3.

Матрица ортогонального оператора в любом ортонормированном базисе ортогональна, и наоборот. Если матрица линейного оператора в некотором ортонормированном базисе ортогональна, то этот оператор является ортогональным.

Теорема 4.

Матрица U является матрицей перехода от одного ортонормированного базиса конечномерного евклидова пространства к другому ортонормированному базису того же пространства тогда и только тогда, когда матрица U является ортогональной.

Утверждение

Оператор, обратный к ортогональному, тоже является ортогональным.

Замечания:

1. Сумма ортогональных операторов в общем случае не является ортогональным оператором.
2. Произведение ортогональных операторов есть ортогональный оператор.
3. Корни характеристического уравнения ортогонального оператора равны ± 1.

3 Диагонализация симметрической матрицы ортогональным преобразованием

Рассмотрим произвольное евклидово пространство E. Пусть A_e и A_f - матрицы линейного оператора $\mathbb{A} : E \to E$ в базисах $\{e\}$ и $\{f\}$ соответственно. Они связаны соотношением:

$$A_f = T_{e\to f}^{-1} \cdot A_e \cdot T_{e\to f}, \tag{2}$$

где $T_{e\to f}$ – матрица перехода от базиса $\{e\}$ к базису $\{f\}$.

Если базисы $\{e\}$ и $\{f\}$ являются ортонормированными, то матрица $T_{e\to f}$ является ортогональной, т.е. $T_{e\to f}^{-1} = T_{e\to f}^{T}$. Тогда соотношение (2) можно записать в виде:

$$A_f = T_{e\to f}^{T} \cdot A_e \cdot T_{e\to f}, \tag{3}$$

- **ортогональное преобразование матрицы** A_e.

Согласно свойству 6 самосопряженного оператора, если A – симметрическая матрица порядка n, то существует такая невырожденная матрица U порядка n, что $U^{-1}AU$ - диагональная матрица с диагональными элементами в виде собственных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы A самосопряженного оператора $\mathbb{A}$.

Теорема 5.

Для любой симметрической матрицы A существует такая ортогональная матрица U, что $U^T AU = \Lambda$, где $\Lambda = diag\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ - диагональная матрица, диагональными элементами которой являются собственные значения матрицы A, повторяющиеся согласно их кратности.

Таким образом, любую симметрическую матрицу ортогональным преобразованием можно привести к диагональному виду.

Схема ортогонального преобразования симметрической матрицы A:

1) найти собственные значения матрицы A из решения характеристического уравнения $|A - \lambda E| = 0$;

2) для каждого собственного значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ найти набор собственных векторов из решения однородной СЛАУ $(A - \lambda E)\, X = 0$, соответствующих этому собственному значению, при этом эти собственные векторы должны быть линейно независимыми и их количество должно равняться кратности собственного значения;

3) преобразовать системы собственных векторов в ортонормированные при помощи процесса ортогонализации Грама – Шмидта. Объединить ортонормированные системы для каждого собственного значения в единую систему векторов, которая будет ортонормированным базисом евклидова пространства;

4) записать матрицу U, столбцами которой являются координаты векторов построенной ортонормированной системы;

5) записать диагональную матрицу Λ, элементами главной диагонали которой являются найденные собственные значения матрицы A.