Линейная алгебра
Модуль 1. Линейные и евклидовы пространства. Линейные операторы в линейном пространстве
Лекция 1.4

Аннотация

Собственные векторы и собственные значения линейного оператора, их свойства. Характеристический многочлен линейного оператора, его независимость от базиса. Матрица линейного оператора в базисе, состоящем из его собственных векторов.

1 Собственные векторы и собственные значения линейного оператора

Пусть $\mathbb{A}$ - линейный оператор, действующий из линейного пространства L в линейное пространство L ($\mathbb{A} : L \to L$).

Определение

Ненулевой вектор $x \in L$ называется **собственным вектором** линейного оператора $\mathbb{A} : L \to L$, если существует такое число $\lambda \in R$, что выполняется равенство:

$$\mathbb{A}x = \lambda x. \tag{1}$$

Число λ называется **собственным значением** оператора $\mathbb{A}$, соответствующим собственному вектору x.

Замечание

Равенство (1) можно записать в **матричном виде**

$$AX = \lambda X \text{ или } (A - \lambda E)\, X = O, \tag{2}$$

где E – единичная матрица, A – матрица линейного оператора $\mathbb{A}$, X – координатный столбец вектора x, O - нулевая матрица-столбец или в **координатной форме**:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\, x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0; \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)\, x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)\, x_n = 0. \end{cases} \tag{3}$$

В силу того, что собственный вектор по определению ненулевой, для существования ненулевого решения однородной СЛАУ (3) необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю, т.е. $det\,(A - \lambda E) = 0$ или

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Определение

Левая часть равенства (4) представляет собой многочлен относительно λ степени n, называемый **характеристическим многочленом** линейного оператора $\mathbb{A}$, а само уравнение (4) называется **характеристическим уравнением** оператора $\mathbb{A}$.

Теорема.

Для того чтобы число λ являлось собственным значением оператора $\mathbb{A}$, необходимо и достаточно, чтобы оно было действительным корнем характеристического уравнения (4) оператора $\mathbb{A}$.

Свойства собственных векторов и собственных значений

1. Множество всех собственных векторов, отвечающих данному собственному значению, не является линейным подпространством пространства L, так как это множество не содержит нулевой элемент. Добавив к этому множеству нулевой элемент, получим линейное подпространство пространства L, которое называется **собственным подпространством линейного оператора**.

2. Собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы.

3. Собственный вектор линейного оператора $\mathbb{A}$ может отвечать только одному собственному значению λ.

4. Если x - собственный вектор оператора $\mathbb{A}$, отвечающий собственному значению λ, то для любого числа $k \neq 0$ вектор kx также является собственным вектором оператора $\mathbb{A}$, отвечающим собственному значению λ.

5. Если x и y - собственные векторы оператора $\mathbb{A}$, отвечающие собственному значению λ, то вектор $x + y$ также является собственным вектором, отвечающим собственному значению λ.

Теорема (инвариантность характеристического многочлена относительно выбора базиса)

Характеристический многочлен оператора $\mathbb{A}$ не зависит от выбора базиса, т.е.

$$|A_f - \lambda E| = |A_e - \lambda E|.$$

Замечание

Левую часть равенства (4) можно записать в виде:

$$P(\lambda) = det(A - \lambda E) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^n d_k \lambda^k. \tag{5}$$

Коэффициенты d_k характеристического многочлена $P(\lambda)$ также не связаны с базисом, то есть являются инвариантами относительно выбора базиса.

Определение

Коэффициент $d_{n-1} = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$ (сумма диагональных элементов матрицы A) называется **следом линейного оператора** $\mathbb{A}$ (или **следом матрицы** A).

Обозначение: trA или spA.

Алгоритм вычисления собственных значений линейного оператора $\mathbb{A}$ *и получения его собственных векторов:*

1. В линейном пространстве L выбрать базис и поставить в соответствие оператору $\mathbb{A}$ матрицу A в выбранном базисе.

2. Составить характеристическое уравнение $det(A - \lambda E) = 0$ и найти его действительные корни λ_i - собственные значения линейного оператора $\mathbb{A}$.

3. Подставить поочередно каждое найденное собственное значение λ_i в однородную систему (3) и найти фундаментальную систему решений (ФСР) для каждой из этих систем. ФСР – координатные столбцы собственных векторов линейного оператора $\mathbb{A}$.

2 Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду.

Теорема

Матрица линейного оператора $\mathbb{A} : L \to L$ в некотором базисе является диагональной тогда и только тогда, когда все векторы этого базиса являются собственными векторами оператора $\mathbb{A}$.

Замечание

Если матрица линейного оператора $\mathbb{A} : L \to L$ в базисе $\{e\} = (e_1, \ldots, e_n)$ является диагональной, то на ее диагонали расположены собственные значения оператора $\mathbb{A}$, повторяющиеся столько раз, какова их кратность.

Следствие 1 (достаточное условие существования базиса из собственных векторов линейного оператора)

Если характеристическое уравнение линейного оператора в n-мерном линейном пространстве имеет n попарно различных действительных корней, то существует базис, состоящий из собственных векторов линейного оператора, в котором матрица линейного оператора является диагональной.

Замечание

Если характеристическое уравнение линейного оператора имеет кратные действительные корни, то может не существовать базиса, в котором матрица линейного оператора будет диагональной.

Следствие 2

Существует базис, в котором матрица линейного оператора $\mathbb{A} : L \to L$ является диагональной тогда и только тогда, когда сумма размерностей всех собственных подпространств линейного оператора $\mathbb{A}$ равна размерности линейного пространства L.

Следствие 3

Если все действительные корни характеристического уравнения квадратной матрицы A порядка n попарно различны, то эта матрица подобна диагональной матрице A^*, т.е. существует невырожденная матрица T^{-1} порядка n такая, что $T^{-1}AT = A^*$.

Процесс замены матрицы A линейного оператора $\mathbb{A}$ диагональной матрицей A^* (подобной A) называют **приведением матрицы A к диагональному виду.**

Замечание

Матрицу линейного оператора можно привести к диагональному виду только тогда, когда кратности собственных значений совпадают с количеством фундаментальных решений однородной СЛАУ (3), записанной для каждого собственного значения .

