Линейная алгебра
Модуль 1. Линейные и евклидовы пространства. Линейные операторы в линейном пространстве
Лекция 1.3

Аннотация

Ортонормированный базис, его свойства и примеры. Процесс ортогонализации Грама - Шмидта. Линейные операторы и их матрицы. Действия над линейными операторами. Преобразование матрицы линейного оператора, инвариантность ее определителя. Подобные матрицы.

1 Ортонормированный базис

Определение

Базис евклидова пространства $e_1, e_2, \ldots, e_n$ называется **ортогональным**, если его элементы образуют ортогональную систему.

Определение

Базис евклидова пространства $e_1, e_2, \ldots, e_n$ называется **ортонормированным**, если его элементы образуют ортонормированную систему.

Примеры ортонормированных базисов:

1. В пространстве V_2 векторы i, j.

2. В арифметическом пространстве R^n векторы $e_1 = (1; 0; \ldots; 0)$, $e_2 = (0; 1; \ldots; 0)$, ... , $e_n = (0; 0; \ldots; 1)$.

Теорема

В любом конечномерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

Определение

Процесс получения из любого базиса $f_1, f_2, \ldots, f_k$ линейной оболочки $L(f_1, f_2, \ldots, f_k)$ ортонормированного базиса $e_1, e_2, \ldots, e_k$ той же линейной оболочки называется **процессом ортогонализации Грама-Шмидта**:

1) $g_1 = f_1$, $e_1 = \dfrac{g_1}{\|g_1\|}$;

2) $g_2 = f_2 - (f_2, e_1) \cdot e_1$, $e_2 = \dfrac{g_2}{\|g_2\|}$;

3) $g_3 = f_3 - (f_3, e_1) \cdot e_1 - (f_3, e_2) \cdot e_2$, $e_3 = \dfrac{g_3}{\|g_3\|}$;

....

k) $g_k = f_k - (f_k, e_1) \cdot e_1 - (f_k, e_2) \cdot e_2 - \ldots - (f_{k-1}, e_{k-1}) \cdot e_{k-1}$,
$e_k = \dfrac{g_k}{\|g_k\|}$.

Здесь векторы $g_1, g_2, \ldots, g_k$ являются вспомогательными.

Свойства ортонормированного базиса

Пусть $X = (x_1\ x_2\ \ldots\ x_n)^T$, $Y = (y_1\ y_2\ \ldots\ y_n)^T$ - координатные столбцы векторов x и y евклидова пространства E в ортонормированном базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Тогда

1. $(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$.
2. $x_i = (x, e_i)$.

2 Линейный оператор

Пусть дано отображение $\mathbb{A}$ линейного пространства L_1 в линейное пространство L_2, сопоставляющее любому элементу $x \in L_1$ некоторый элемент (образ) $\mathbb{A}x \in L_2$.

Обозначение: $\mathbb{A} : L_1 \longrightarrow L_2$ - отображение $\mathbb{A}$, действующее из L_1 в L_2.

Определение

Отображение $\mathbb{A} : L_1 \longrightarrow L_2$ называется **линейным оператором**, если для всех элементов $x, y \in L_1$ и $\forall \lambda \in R$ выполняются соотношения:

1) $\mathbb{A}(x+y) = \mathbb{A}x + \mathbb{A}y$,

2) $\mathbb{A}(\lambda x) = \lambda \cdot \mathbb{A}x$.

Утверждение

Линейный оператор сохраняет линейные комбинации, то есть переводит линейную комбинацию векторов в линейную комбинацию их образов с теми же коэффициентами:

$$\mathbb{A}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbb{A} x_i.$$

Утверждение

Линейный оператор переводит нулевой элемент пространства L_1 в нулевой элемент пространства L_2.

Утверждение

Линейный оператор переводит линейно зависимые (независимые) вектора из L_1 в линейно зависимые (независимые) вектора из L_2.

Определение

Оператор $\mathbb{I} : L \longrightarrow L$, действующий согласно правилу $\mathbb{I}x = x$ $\forall x \in L$, называется **тождественным** или **единичным**.

Определение

Оператор $\mathbb{O} : L_1 \longrightarrow L_2$ называют **нулевым,** если $\mathbb{O}x = \theta$.

Определение

Линейный оператор $\mathbb{A}$ называют **невырожденным**, если из равенства $\mathbb{A}x = \theta$ следует, что $x = \theta$. В противном случае оператор $\mathbb{A}$ называют **вырожденным**.

Примеры линейных операторов:

1. *Преобразование подобия*: $\mathbb{A}x = \lambda x$, $\forall x \in L$, $\lambda \neq 0$.

2. *Оператор дифференцирования* $\frac{d}{dx}$, действующий в линейном пространстве $P_n\left[x\right]$ многочленов степени, не превосходящей числа n.

Рассмотрим действие линейного оператора $\mathbb{A} : L \longrightarrow L$ на векторы базиса $\{e\} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Разложим векторы $\mathbb{A}e_1$, $\mathbb{A}e_2$, ... , $\mathbb{A}e_n$ по базису $\{e\}$:

$\mathbb{A}e_1 = \alpha_{11}e_1 + \alpha_{21}e_2 + \ldots + \alpha_{n1}e_n$,

$\mathbb{A}e_2 = \alpha_{12}e_1 + \alpha_{22}e_2 + \ldots + \alpha_{n2}e_n$,

....

$\mathbb{A}e_n = \alpha_{1n}e_1 + \alpha_{2n}e_2 + \ldots + \alpha_{nn}e_n$.

Коэффициенты α_{ij} этих разложений образуют матрицу

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

которую называют **матрицей линейного оператора $\mathbb{A}$ в базисе** $\{e\}$. Здесь i-ый столбец матрицы линейного оператора $\mathbb{A}$ является координатным столбцом вектора $\mathbb{A}e_i$.

Теорема

Пусть даны линейный оператор $\mathbb{A} : L \longrightarrow L$ и базис $\{e\} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ в L. Тогда вектор $\mathbb{A}x$ в базисе $\{e\}$ имеет координаты $A \cdot X$, где A - матрица линейного оператора $\mathbb{A}$ в базисе $\{e\}$, X - координатный столбец вектора x в базисе $\{e\}$.

3 Действия над линейными операторами

Определение

Операторы $\mathbb{A} : L_1 \longrightarrow L_2$ и $\mathbb{B} : L_1 \longrightarrow L_2$ называются **равными**, если $\mathbb{A}x = \mathbb{B}x\ \forall x \in L_1$.

Определение

Суммой операторов $\mathbb{A} : L_1 \longrightarrow L_2$ и $\mathbb{B} : L_1 \longrightarrow L_2$ называется оператор $(\mathbb{A} + \mathbb{B}) : L_1 \longrightarrow L_2$, действующий по правилу $(\mathbb{A} + \mathbb{B})\, x = \mathbb{A}x + \mathbb{B}x\ \forall x \in L_1$.

Свойства операции сложения операторов:

1) $\mathbb{A} + \mathbb{B} = \mathbb{B} + \mathbb{A}$,
2) $(\mathbb{A} + \mathbb{B}) + \mathbb{C} = \mathbb{A} + (\mathbb{B} + \mathbb{C})$,
3) $\mathbb{A} + (-\mathbb{A}) = \mathbb{O}$, где $(-\mathbb{A})$ – противоположный оператор.

Определение

Произведением оператора $\mathbb{A} : L_1 \longrightarrow L_2$ **на действительное число** λ называется оператор $(\lambda\mathbb{A}) : L_1 \longrightarrow L_2$, действующий по правилу $(\lambda\mathbb{A})\, x = \lambda \cdot \mathbb{A}x\ \forall x \in L_1$.

Свойства операции умножения операторов на число:

1. $\alpha\,(\beta\mathbb{A}) = (\alpha\beta)\,\mathbb{A}$.
2. $(\alpha + \beta)\,\mathbb{A} = \alpha\mathbb{A} + \beta\mathbb{A}$.
3. $\alpha\,(\mathbb{A} + \mathbb{B}) = \alpha\mathbb{A} + \alpha\mathbb{B}$.

Определение

Произведением операторов $\mathbb{A} : L_2 \longrightarrow L_3$ и $\mathbb{B} : L_1 \longrightarrow L_2$ называется оператор $(\mathbb{A}\mathbb{B}) : L_1 \longrightarrow L_3$, действующий по правилу

$(\mathbb{A}\mathbb{B})\,x = \mathbb{A}\,(\mathbb{B}x)\ \forall x \in L_1$.

Свойства операции умножения операторов

1. $(\mathbb{A}\mathbb{B})\mathbb{C} = \mathbb{A}(\mathbb{B}\mathbb{C})$.
2. $(\mathbb{A}+\mathbb{B})\,\mathbb{C} = \mathbb{A}\mathbb{C}+\mathbb{B}\mathbb{C}$, $\mathbb{C}\,(\mathbb{A}+\mathbb{B}) = \mathbb{C}\mathbb{A}+\mathbb{C}\mathbb{B}$.

Замечание

Умножение линейных операторов не коммутативно.

Утверждение

В конечномерных линейных пространствах произведению линейного оператора на число, сумме линейных операторов и произведению линейных операторов соответствуют такие же действия с их матрицами.

4 Переход к новому базису

Пусть $\mathbb{A} : L \longrightarrow L$ - линейный оператор, $\{e\} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ и $\{f\} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ – два базиса пространства L; A_e и A_f - матрицы линейного оператора $\mathbb{A}$ в базисах $\{e\}$ и $\{f\}$.

Теорема

Матрицы A_e и A_f линейного оператора $\mathbb{A} : L \longrightarrow L$ в различных базисах $\{e\}$ и $\{f\}$ связаны соотношением

$$A_f = T^{-1}_{e\to f} \cdot A_e \cdot T_{e\to f}, \tag{1}$$

где $T_{e\to f}$ - матрица перехода от базиса $\{e\}$ к базису $\{f\}$.

Определение

Квадратные матрицы A и B порядка n называются **подобными**, если существует такая невырожденная матрица P, что

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = B. \tag{2}$$

Следствие

Формула (1) означает, что матрицы, представляющие один и тот же оператор в разных базисах, являются подобными. Верно и обратное, если две матрицы A и B подобны, то есть выполняется (2), то их можно рассматривать, как матрицы одного оператора, но в разных базисах.

Определение

Определителем линейного оператора называется определитель его матрицы в каком-либо базисе.

Теорема

Если матрицы A и B подобны, то $detA = detB$.

Следствие

Определитель матрицы линейного оператора не зависит от выбора базиса.