Линейная алгебра
Модуль 1. Линейные и евклидовы пространства. Линейные операторы в линейном пространстве
Лекция 1.2

Аннотация

Линейное подпространство, его свойства и примеры. Линейная оболочка, ее свойства и примеры. Евклидово пространство, аксиомы и примеры. Неравенство Коши – Буняковского. Норма вектора, ее аксиомы и примеры. Нормированное пространство. Ортогональные вектора

1 Линейное подпространство

Определение

Непустое множество L_1 линейного пространства L ($L_1 \subset L$) называется **линейным подпространством пространства** L , если выполняются условия:

1) $\forall x, y \in L_1 : (x + y) \in L_1$,

2) $\forall x \in L_1$ и $\forall \lambda \in R$: $\lambda x \in L_1$.

Утверждение

Подмножество L_1, удовлетворяющее условиям данного определения, само является линейным пространством относительно операций сложения элементов и умножения на действительное число, действующих в L .

Примеры линейных подпространств:

1. В любом линейном пространстве L всегда имеются два линейных подпространства: само пространство L и нулевое подпространство, состоящее из одного нулевого элемента θ . Эти подпространства

называются **несобственными**. Все остальные линейные пространства называются **собственными.**

2. Множество всех свободных векторов, параллельных данной плоскости, образуют линейное подпространство пространства V_3 всех свободных векторов трехмерного пространства.

3. В линейном пространстве $M_n(R)$ всех квадратных матриц порядка n линейное подпространство образуют все симметрические матрицы.

Свойства линейного подпространства:

1. Если $e_1, e_2, \ldots, e_k$ - элементы линейного пространства L_1, то любая их линейная комбинация $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_k e_k$ также является элементом L_1.

2. Размерность любого подпространства линейного пространства не превосходит размерности самого пространства.

2 Линейная оболочка

Определение

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_k$ - совокупность элементов линейного пространства L . **Линейной оболочкой элементов** $e_1, e_2, \ldots, e_k$ называется совокупность всех линейных комбинаций этих элементов, то есть множество $\left\{\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_k e_k | \lambda_i \in R, i = \overline{1, k}\right\}$. При этом говорят, что линейная оболочка натянута на векторы $e_1, e_2, \ldots, e_k$.

Обозначение: $L(e_1, e_2, \ldots, e_k)$

Свойства линейной оболочки:

1. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_k$ - элементы линейного пространства. Тогда линейная оболочка $L(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ является линейным подпространством линейного пространства L .

2. Линейная оболочка элементов $e_1, e_2, \ldots, e_k$ является наименьшим подпространством, содержащим эти элементы.

3. Любое линейное пространство является линейной оболочкой любого из своих базисов.

4. Размерность линейной оболочки $L\left(e_1, e_2, \ldots, e_k\right)$ равна максимальному числу линейно независимых элементов в системе e_1, e_2, …, e_k . Если элементы e_1, e_2, …, e_k линейно независимы, то размерность линейной оболочки $L\left(e_1, e_2, \ldots, e_k\right)$ равна k, а сами элементы e_1, e_2, …, e_k образуют базис линейной оболочки $L\left(e_1, e_2, \ldots, e_k\right)$.

3 Евклидово пространство

Определение

Вещественное линейное пространство E называется **евклидовым пространством**, если в этом пространстве имеется правило, согласно которому любой паре векторов $x, y \in E$ ставится в соответствие действительное число, обозначаемое (x, y) и называемое **скалярным произведением.** При этом выполняются **аксиомы скалярного произведения**:

1. $(x, y) = (y, x)$ - коммутативность,
2. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z) \, \forall z \in E$ - дистрибутивность,
3. $(\lambda x, y) = \lambda\,(x, y) \, \forall \lambda \in R$ - ассоциативность,
4. $(x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ – неотрицательность скалярного произведения.

Примеры евклидовых пространств:

1. В линейных пространствах V_2 и V_3 любых свободных векторов на плоскости и в пространстве вводится скалярное произведение: $(x, y) = |x||y| cos\varphi$.

2. В арифметическом линейном пространстве R^n скалярное произведение задается формулой $(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$.

3. В линейном пространстве $C[a,b]$ всех функций, непрерывных на $[a,b]$, скалярное произведение задается формулой
$(x(t), y(t)) = \int_a^b x(t)\, y(t)\, dt$.

Замечание

В одном и том же линейном пространстве скалярное произведение можно задать разными способами.

Теорема (неравенство Коши-Буняковского)

Для любых векторов $x, y \in E$ справедливо неравенство Коши-Буняковского:

$$(x,y)^2 \leq (x,x) \cdot (y,y)$$

Следствия:

1. Неравенство Коши-Буняковского в R^n
(или **неравенство Коши**):
$(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n)^2 \leq \left(x_1^2 + \ldots + x_n^2\right)\left(y_1^2 + \ldots + y_n^2\right)$.
2. Неравенство Коши-Буняковского в $C[a,b]$
(или **неравенство Шварца**):
$\left(\int_a^b x(t)\, y(t)\, dt\right)^2 \leq \int_a^b x^2(t)\, dt \cdot \int_a^b y^2(t)\, dt$.
3. Неравенство Коши-Буняковского в V_2 и V_3:
$(x,y)^2 \leq |x| \cdot |y|$.

4 Нормированное пространство

Обобщением понятия длины свободного вектора является норма.

Определение

Правило, заданное на линейном пространстве L, которое каждому вектору $x \in L$ ставит в соответствие действительное число, обозначаемое $\|x\|$, называется **нормой**, если оно удовлетворяет **аксиомам нормы**:

1. $\|x\| \geq 0$, причем $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$,
2. $\|\lambda x\| = \lambda \|x\| \; \forall \lambda \in R$,
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ - **неравенство треугольника** или **неравенство Минковского.**

Определение

Линейное пространство, в котором задана норма, называется **нормированным пространством.**

Теорема

Любое евклидово пространство является нормированным, если норма определяется равенством

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}$$

Примеры:

1. В евклидовых пространствах V_2 и V_3: $\|x\| = |x|$.
2. В евклидовом пространстве R^n: $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$.
3. В евклидовом пространстве $C\,[a, b]$: $\|x\| = \sqrt{\int_a^b x^2\,(t)\,dt}$.

Замечание 1

Используя норму, неравенство Коши-Буняковского можно записать в виде

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Замечание 2

Угол φ между векторами x и y можно определить из равенства $cos\varphi = \dfrac{(x,y)}{\|x\| \cdot \|y\|} = \dfrac{(x,y)}{\sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}}$

5 Ортогональные вектора

Определение

Два ненулевых вектора евклидова пространства $x, y \in E$ называются **ортогональными**, если их скалярное произведение равно нулю, то есть $(x, y) = 0$.

Определение

Система ненулевых элементов $x_1, \ldots, x_n$ евклидова пространства называется **ортогональной системой**, если любые два элемента этой системы ортогональны, то есть $(x_i, x_j) = 0, i \neq j, i, j = \overline{1, n}$.

Определение

Система ненулевых элементов $x_1, \ldots, x_n$ евклидова пространства называется **ортонормированной системой**, если любые элементы этой системы попарно ортогональны и норма каждого элемента равна 1, то есть

$$(x_i, x_j) = \begin{cases} 0, i \neq j, \\ 1, i = j, \end{cases}$$

Теорема

Любая ортогональная (ортонормированная) система ненулевых элементов линейно независима.

Следствие

В n-мерном евклидовом пространстве любая ортогональная (ортонормированная) система из n элементов образует базис.