Линейная алгебра Модуль 1. Линейные и евклидовы пространства. Линейные операторы в линейном пространстве
Лекция 1.1

Аннотация

Вещественное линейное пространство, аксиомы и примеры. Линейно зависимые и линейно независимые векторы. Базис и размерность линейного пространства. Переход к новому базису.

1 Вещественное линейное пространство

Определение

Множество L элементов любой природы называется **вещественным линейным пространством**, если выполнены три условия:

1. Задано сложение элементов L , то есть закон, по которому любым элементам $x, y \in L$ ставится в соответствие элемент $z = (x+y) \in L$, называемый **суммой**.

2. Задано умножение элемента на число, то есть закон по которому любому элементу $x \in L$ и любому числу $\lambda \in R$ ставится в соответствие элемент $z = \lambda x \in L$, называемый **произведением элемента на число**.

3. Указанные законы (линейные операции) подчиняются **аксиомам линейного пространства:**

   а) сложение коммутативно: $x + y = y + x$,
   б) сложение ассоциативно: $(x + y) + z = x + (y + z)$,

в) $\exists \theta \in L$ $\forall x \in L$: $x + \theta = x$, θ - нулевой элемент,

г) $\forall x \in L$ $\exists (-x) \in L$: $x + (-x) = 0$, $(-x)$ - элемент, противоположный элементу x,

д) $x \cdot 1 = x$ $\forall x \in L$,

е) умножение на число ассоциативно: $\lambda (\mu x) = (\lambda \mu) x$ $\forall x \in L$,

ж) дистрибутивность умножения на число относительно сложения элементов из L: $\lambda (x + y) = \lambda x + \lambda y$ $\forall x, y \in L$, $\forall \lambda \in R$,

з) дистрибутивность умножения на число относительно сложения чисел из R: $(\lambda + \mu) x = \lambda x + \mu x$ $\forall x \in L$, $\forall \lambda, \mu \in R$.

Определение

Элементы линейного пространства называются **векторами** и обозначаются строчными буквами x, y, z, ...

Примеры линейных пространств:

1. Множества V_3 и V_2 всех свободных геометрических векторов в пространстве R^3 и на плоскости R^2 со стандартными линейными операциями над векторами.

2. Множество $M_{m \times k}(R)$ матриц размерности $m \times k$, где элементами матриц являются действительные числа.

3. Множество $P_n(x)$ – множество многочленов переменной x и степени, не превышающей n .

4. Множество $C[a, b]$ функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$, с обычными операциями сложения функций и умножения функций на число.

2 Линейная зависимость векторов

Определение

Система векторов $x_1, x_2, \ldots, x_m$ в линейном пространстве L называется **линейно зависимой**, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору, то есть существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in R$, одновременно не равные нулю, для которых выполняется равенство $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_m x_m = \theta$.

Определение

Векторы $x_1, x_2, \ldots, x_m$ **линейно независимы**, если только их тривиальная линейная комбинация равна нулевому вектору.

Теорема (критерий линейной зависимости векторов)

Для того чтобы система векторов $x_1, x_2, \ldots, x_m$ была линейно зависима необходимо и достаточно, чтобы один из векторов системы являлся линейной комбинацией остальных:

$$x_i = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_{i-1} x_{i-1} + \lambda_{i+1} x_{i+1} + \ldots + \lambda_m x_m.$$

Следствия

1. Если среди векторов $x_1, x_2, \ldots, x_m \in L$ есть нулевой вектор, то эта система векторов линейно зависима.

2. Если система векторов содержит линейно зависимую подсистему, то она линейно зависима.

3. Если система векторов линейно независима, то и любая ее подсистема тоже линейно независима.

4. Если векторы $e_1, e_2, \ldots, e_p$ линейного пространства L линейно независимы и вектор $s \in L$ не является их линейной комбинацией, то расширенная система векторов $e_1, e_2, \ldots, e_p, s$ является линейно независимой.

3 Базис линейного пространства

Определение

Базисом линейного пространства L называют любую упорядоченную систему векторов этого пространства, для которой выполнены два условия:

1) эта система векторов линейно независима,

2) любой вектор в линейном пространстве может быть представлен в виде линейной комбинации векторов этой системы.

Определение

Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_n$ - базис в L, тогда любой вектор $x \in L$ можно представить в виде $x = x_1 b_1 + x_2 b_2 + \ldots + x_n b_n$. Это равенство есть **разложение вектора** x **по базису** $b_1, b_2, \ldots, b_n$, а числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - **координаты вектора** x **в данном базисе**.

Теорема (о единственности разложения)

В линейном пространстве разложение любого вектора по данному базису единственно.

Базис $b_1, b_2, \ldots, b_n$ в данном линейном пространстве L записывают как матрицу-строку

$$\{b\} = (b_1 \ b_2 \ \ldots \ b_n)\,,$$

а координаты вектора x - как матрицу-столбец

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Тогда разложение вектора x по базису $b_1, b_2, \ldots, b_n$ можно записать как произведение матрицы-строки на матрицу-столбец:

$$x = \{b\}X.$$

Теорема (линейные операции над векторами в заданном базисе)

При сложении любых двух векторов в линейном пространстве их координаты в одном и том же базисе складываются, а при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.

В матричном виде:
$\{b\}\,X + \{b\}\,Y = \{b\}\,(X+Y)$ и $\lambda\,\{b\}\,X = \{b\}\,(\lambda X)$.

Следствие

Линейная независимость (зависимость) векторов линейного пространства эквивалентна линейной независимости (зависимости) их координатных столбцов в одном и том же базисе.

4 Размерность линейного пространства

Определение

Максимальное количество линейно независимых векторов в данном линейном пространстве L называется **размерностью линейного пространства L.**

Обозначение: $dimL$.

Существуют линейные пространства, в которых линейно независимые системы содержат бесконечное количество векторов. Эти пространства **бесконечномерные**. Мы будем рассматривать n-мерные линейные пространства, которые называются **конечномерными.**

Теорема

Если линейное пространство L n-мерно, то любая линейно независимая система из n векторов является его базисом.

Теорема

Если в линейном пространстве L существует базис из n векторов, то $dimL = n$.

5 Матрица перехода к новому базису

В линейном пространстве все базисы равноправны. Иногда удобно для представления элементов линейного пространства использовать несколько базисов. Но тогда возникает задача преобразования координат векторов, связанная с изменением базиса.

Пусть в n-мерном линейном пространстве L заданы два базиса: старый $\{e\} = (e_{1,} \ldots, e_n)$ и новый $\{f\} = (f_{1,} \ldots, f_n)$. Любой вектор можно разложить по базису $\{e\}$. В частности, любой вектор из базиса $\{f\}$ можно разложить по базису $\{e\}$:

$$\begin{aligned} f_1 &= \alpha_{11}e_1 + \alpha_{21}e_2 + \ldots + \alpha_{n1}e_n, \\ f_2 &= \alpha_{12}e_1 + \alpha_{22}e_2 + \ldots + \alpha_{n2}e_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n &= \alpha_{1n}e_1 + \alpha_{2n}e_2 + \ldots + \alpha_{nn}e_n. \end{aligned} \tag{1}$$

Коэффициенты α_{ij} этих разложений образуют матрицу

$$T_{e\to f} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

которая является матрицей перехода от базиса $\{e\}$ к базису $\{f\}$.

Заметим, что i -ый столбец матрицы перехода является столбцом координат вектора f_i относительно старого базиса. Таким образом, матрица перехода состоит из координат векторов нового базиса в старом, записанных по столбцам.

Свойства матричного перехода:

1. Соотношение (1) можно записать в матричном виде: $\{f\} = \{e\} \cdot T_{e \to f}$.

2. Если T – матрица перехода от базиса $\{e\}$ к базису $\{f\}$, то обратная матрица T^{-1} является матрицей перехода от базиса $\{f\}$ к базису $\{e\}$.

3. Пусть даны базисы $\{e\}$, $\{g\}$, $\{f\}$, тогда $T_{e \to g} = T_{e \to f} \cdot T_{f \to g}$.

Теорема (преобразование координат вектора при переходе от старого базиса к новому)

Пусть X_e - матрица-столбец координат вектора x в базисе $\{e\}$, X_f - матрица-столбец координат вектора x в базисе $\{f\}$. Тогда координаты вектора x в базисах $\{e\}$ и $\{f\}$ связаны соотношением

$$X_e = T_{e \to f} \cdot X_f.$$