Интегралы и дифференциальные уравнения

Модуль 2. Определенный интеграл, несобственные интегралы

Лекция 2.6

Аннотация

Несобственные интегралы II рода.

Определение (ограниченная функция)

1. Функция f называется **ограниченной сверху** на множестве X, если существует такое число M, что все значения функции f на множестве X не больше числа M:
$$\Big(f \text{ ограничена сверху на множестве } X\Big) \Longleftrightarrow \exists\, M\ \forall\, x\ \Big(x \in X \Rightarrow f(x) \leqslant M\Big)$$
2. Функция f называется **ограниченной снизу** на множестве X, если существует такое число M, что все значения функции f на множестве X не меньше числа M:
$$\Big(f \text{ ограничена снизу на множестве } X\Big) \Longleftrightarrow \exists\, m\ \forall\, x\ \Big(x \in X \Rightarrow f(x) \geqslant m\Big)$$
3. Функция f называется **ограниченной** на множестве X, если существуют такие числа m и M, что все значения функции f на множестве X не больше числа M и не меньше числа m:
$$\Big(f \text{ ограничена на множестве } X\Big) \Longleftrightarrow \exists\, m, M\ \forall\, x\ \Big(x \in X \Rightarrow m \leqslant f(x) \leqslant M\Big)$$

Примеры

1. Функция $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$ ограничена снизу на полуинтервале $[0; \pi/2)$ (но не ограничена сверху).
2. Функция $f(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$ ограничена сверху на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$ (но не ограничена снизу).
3. Функция $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$ ограничена на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$.
4. Функция $f(x) = x^3$ неограничена на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$.

В этой лекции мы расширим понятие определенного интеграла на случай неограниченных функций и получим несобственный интеграл II рода.

Определение (несобственный интеграл II рода)

1. Если $f(x) \xrightarrow{x \to b} \infty$, но при этом функция $f(x)$ ограничена и интегрируема на любом

сегменте $[a; b-\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, то предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ называется несобственным интегралом II рода; точку b называют *особой* точкой функции $f(x)$.

2. Если $f(x) \xrightarrow{x\to a} \infty$, но при этом функция $f(x)$ ограничена и интегрируема на любом сегменте $[a+\varepsilon; b]$, $\varepsilon > 0$, то предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ называется несобственным интегралом II рода; точку a называют *особой* точкой функции $f(x)$.

3. Пусть $c \in (a; b)$; если $f(x) \xrightarrow{x\to c} \infty$, но при этом функция $f(x)$ ограничена и интегрируема на любом сегменте, не содержащем точку c, то предел $\lim\limits_{\substack{\varepsilon_1\to 0+\\ \varepsilon_2\to 0+}} \left(\int\limits_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \int\limits_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx \right)$ называется несобственным интегралом II рода; точку c называют *особой* точкой функции $f(x)$.

Если предел существует, то говорят, что несобственный интеграл II рода сходится; если предел бесконечен или не существует, то говорят, что интеграл расходится. Для обозначения несобственного интеграла II рода используют тот же символ, что и для обычного определенного интеграла:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to +0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx, \quad \int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to +0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx,$$
$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0+\\ \varepsilon_2\to 0+}} \left(\int\limits_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \int\limits_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx \right) \tag{2.8.1}$$

!

Геометрический смысл: несобственный интеграл второго рода выражает площадь бесконечно высокой криволинейной трапеции.

Примеры

1. Рассмотрим интеграл $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$. Точка $x = b$ является особой для функции $\frac{1}{(b-x)^p}$, так как $\lim\limits_{x\to b-} \frac{1}{(b-x)^p} = +\infty$; следовательно, интеграл $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ является несобственным. Воспользуемся определением несобственного интеграла:

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^p} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^p} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \begin{cases} -\frac{(b-x)^{1-p}}{1-p}\Big|_a^{b-\varepsilon}, \ p\neq 1 \\ -\ln(b-x)\Big|_a^{b-\varepsilon}, \ p=1 \end{cases} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} \begin{cases} -\frac{\varepsilon^{1-p}-(b-a)^{1-p}}{1-p}, \ p\neq 1 \\ \ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right), \ p=1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}, \ p<1 \\ \infty, \ p\geqslant 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} \text{интеграл } \int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^p} \\ \text{сходится при } p<1 \\ \text{и расходится при } p\geqslant 1 \end{array}$$

Аналогично доказывается, что интеграл $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ сходится при $p<1$ и расходится при $p\geqslant 1$.

2. Рассмотрим интеграл $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Функция $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ имеет две особых точки на сегменте $[-1;1]$: $x=1$, так как $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty$ и $x=-1$, так как $\lim\limits_{x\to -1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty$. Следовательно, интеграл $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ нужно представить в виде суммы двух несобственных интегралов:

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to +0} \int\limits_{-1+\varepsilon}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \lim_{\varepsilon\to +0} \int\limits_{0}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to +0} \left(\arcsin(x)\Big|_{-1+\varepsilon}^{0}\right) + \lim_{\varepsilon\to +0} \left(\arcsin(x)\Big|_{0}^{1-\varepsilon}\right) = \lim_{\varepsilon\to +0} \big(-\arcsin(-1+\varepsilon)\big) + \lim_{\varepsilon\to +0} \big(\arcsin(1-\varepsilon)\big) =$$

$$= -\arcsin(-1) + \arcsin(1) = -\left(-\tfrac{\pi}{2}\right) + \tfrac{\pi}{2} = \pi$$

Мы разделили исходный интеграл на два интеграла, используя точку $x=0$; с тем же успехом мы могли бы использовать любое другое значение x, лежащее между -1 и 1; например, можно было бы написать:

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int\limits_{-1}^{0.5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int\limits_{0.5}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \ldots$$

! Несобственные II рода интегралы обладают теми же свойствами, какими обладают обычные определенные интегралы (см. лекцию 2.1).

! Теоремы, которые будут изучаться далее, мы сформулируем для случая, когда особая точка функции совпадает с правым концом отрезка $[a;b]$ ($x=b$ – особая точка).
Для случаев, когда особая точка функции совпадает с левым концом отрезка $[a;b]$ или находится внутри этого отрезка, эти теоремы формулируются аналогично.

Теорема (критерий Коши)

Для того, чтобы несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходился необходимо и достаточно, чтобы для любого числа $\varepsilon > 0$ можно было указать такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что при любых ξ_1, ξ_2, удовлетворяющих условию $0 < \xi_1 < \xi_2 < \delta(\varepsilon)$ выполнялось неравенство $\left|\int\limits_{a-\xi_2}^{b-\xi_1} f(x)dx\right| < \varepsilon$:

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \ \exists\,\delta(\varepsilon) > 0\quad \left(0 < \xi_1 < \xi_2 < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \left|\int\limits_{a-\xi_2}^{b-\xi_1} f(x)dx\right| < \varepsilon\right)$$

Теорема (общий признак сравнения)

Если b – особая точка функций $f(x)$ и $g(x)$ и существует число $C > 0$ такое, что $\lim\limits_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = C$, то из сходимости интеграла $\int\limits_a^b g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$, а из расходимости интеграла $\int\limits_a^b g(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Теорема (частный признак сравнения)

Если b – особая точка функции $f(x)$ и существует число $C > 0$ такое, что $\lim\limits_{x\to b} |f(x)|\cdot(b-x)^p = C$, то

- при $p < 1$ интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится;
- при $p \geqslant 1$ интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ расходится.

Примеры

1. Рассмотрим интеграл $\int\limits_0^1 x^p \ln(x)dx$.

(a) Пусть $\boxed{p > 0}$; тогда

$$\lim_{x\to 0} x^p \ln(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x)}{x^{-p}} = \left|\begin{array}{c}\text{воспользуемся правилом}\\ \text{Лопиталя}\end{array}\right| = \lim_{x\to 0} \frac{x^{-1}}{-px^{-p-1}} = -\frac{1}{p}\lim_{x\to 0} x^p = 0$$

Следовательно, при $p > 0$ интеграл является собственным и вычисляется с помощью стандартных методов.

(b) Пусть $\boxed{-1 < p < 0}$; выберем число q так, что $|p| < q < 1$; обозначим $f(x) = x^p \ln(x)$, $g(x) = \frac{1}{x^q}$ тогда

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^p \ln(x)}{\frac{1}{x^q}} = \lim_{x\to 0} x^{p+q} \ln(x) = 0 \tag{2.8.2}$$

Мы воспользовались тем, что $p + q > 0$ и в этом случае, как уже было только что доказано в пункте (a), предел равен нулю. В разобранном выше примере мы доказали, что интеграл $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ сходится при $p < 1$ и расходится при $p \geqslant 1$; пусть $a = 0$, $b = 1$, $p = q$; так как $q < 1$, то интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^q}$ тоже сходится. Из (2.8.2) и общего признака сравнения следует, что интеграл $\int\limits_0^1 x^p \ln(x) dx$ тоже сходится.

(c) Пусть $\boxed{p \leqslant -1}$; обозначим $f(x) = x^p \ln(x)$, $g(x) = x^p$ тогда

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^p \ln(x)}{x^p} = \lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty \tag{2.8.3}$$

Интеграл $\int\limits_0^1 x^p dx = \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^{|p|}}$ расходится, так как $|p| \geqslant 1$. Из (2.8.3) и общего признака сравнения следует, что интеграл $\int\limits_0^1 x^p \ln(x) dx$ тоже расходится.

2. Рассмотрим интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-kx^2)}}$ $(0 < k < 1)$.

$$\lim_{x\to 1-} \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-kx^2)}} = +\infty \Rightarrow \begin{array}{c} x = 1 \ - \text{ особая точка} \\ \text{подынтегральной функции} \end{array}$$

Рассмотрим поведение подынтегральной функции вблизи особой точки:

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-kx^2)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}\sqrt{(1-kx^2)}} \sim \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}} \quad (x \to 1)$$

Данная запись означает следующее: функция $\frac{1}{\sqrt{1+x}\sqrt{(1-kx^2)}}$ стремится к числу $\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{(1-k)}}$ при $x \to 1$, следовательно, эта функция ограничена вблизи точки $x = 1$ и не оказывает заметного влияния на поведение подынтегральной функции; поведение подынтегральной функции почти полностью определяется функцией $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$; при этом $\sqrt{1-x} = (1-x)^{\frac{1}{2}}$; так как показатель этой функции меньше 1, то, согласно частному признаку сравнения, интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-kx^2)}}$ сходится.

Формула Ньютона-Лейбница.

Если первообразная функции $f(x)$ непрерывна во всех точках отрезка $[a;b]$ (в том числе, в особых точках функции $f(x)$), то для вычисления несобственного интеграла можно использовать основную формулу интегрального исчисления – формулу Ньютона-Лейбница:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)} \qquad \begin{array}{l} F \ - \text{первообразная функции } f(x), \\ F \ - \text{непрерывна во всех точках } [a;b] \end{array} \tag{2.8.4}$$

Примеры

1. Рассмотрим интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$. Точка $x = 1$ является особой точкой подынтегральной функции, так как $\lim\limits_{x\to 1-} \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty$. Найдем первообразную:

$$F(x) = \int \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \left| \begin{array}{c} t = \arcsin(x) \\ dt = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \right| = \int tdt = \frac{1}{2}t^2 = \frac{1}{2}\arcsin^2(x)$$

Функция $\frac{1}{2}\arcsin^2(x)$ непрерывна на отрезке $[0;1]$, следовательно можно воспользоваться формулой Ньютона-Лейбница:

$$\int_0^1 \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{1}{2}\arcsin^2(x)\Big|_0^1 = \frac{\pi^2}{8}$$

2. Рассмотрим интеграл $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\ln(x)}$. Точка $x = 1$ является особой точкой подынтегральной функции, так как $\lim\limits_{x\to 1-} \frac{1}{x\ln(x)} = -\infty$. Найдем первообразную:

$$F(x) = \int \frac{dx}{x\ln(x)} = \left| \begin{array}{c} t = \ln(x) \\ dt = \frac{dx}{x} \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln|\ln(x)|$$

Так как $\lim\limits_{x\to 1} \ln|\ln(x)| = -\infty$, интеграл $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\ln(x)}$ не существует (расходится).

Формула интегрирования по частям.

Пусть b – особая точка функции $f(x)$. **Обозначим:** $uv\Big|_a^b = \lim\limits_{x\to b} u(x)v(x) - u(a)v(a)$. Пусть функции u, v и их производные определены и непрерывны во всех точках промежутка $[a;b]$, кроме точки b. Тогда справедлива **формула интегрирования по частям:**

$$\boxed{\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu}$$

Формула замены переменной.

Пусть b – особая точка функции $f(x)$. Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;b)$ и интегрируема в каждой части этого промежутка, не содержащей точку b. Пусть функция $x = g(t)$ непрерывна и монотонно возрастает на промежутке $[\alpha;\beta)$. Предположим, что $g(\alpha) = a$ и $\lim\limits_{t\to\beta} g(t) = b$. Если $g(t)$ имеет непрерывную производную на промежутке $[\alpha;\beta)$, то $dx = g'(t)dt$. Тогда справедлива **формула замены переменной** в несобственном интеграле:

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(g(t))\cdot g'(t)dt}$$

Переход от несобственного интеграла I рода к несобственному интегралу II рода.

Если $x = b$ – особая точка функции $f(x)$, а во всех остальных точках полуинтервала $[a;b)$ функция $f(x)$ непрерывна, то несобственный интеграл II рода можно преобразовать в несобственный интеграл I рода с помощью замены:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = \left|\begin{array}{c} x = b-\frac{1}{t} \Rightarrow dx = \frac{dt}{t^2} \\ x = a \Rightarrow t = \frac{1}{b-a},\quad x = b-\varepsilon \Rightarrow t = \frac{1}{\varepsilon}\end{array}\right| =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_{\frac{1}{b-a}}^{\frac{1}{\varepsilon}} f\left(b-\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t^2} = \int\limits_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f\left(b-\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t^2}$$

Из сходимости одного из интегралов $\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f\left(b-\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t^2}$ следует сходимость другого и равенство этих интегралов.

Главное значение несобственного интеграла II рода.

Предположим, что на отрезке $[a;b]$ задана функция $f(x)$, у которой внутри данного отрезка есть особая точка c. Если $f(x)$ интегрируема на любой части отрезка $[a;b]$, не содержащей точки c, то, как мы уже писали в начале лекции, можно построить несобственный интеграл функции $f(x)$ по отрезку $[a;b]$:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1\to 0+}\int\limits_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2\to 0+}\int\limits_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx \tag{2.8.5}$$

В этой формуле предельные переходы по ε_1 и ε_2 выполняются *независимо* друг от друга. В тех случаях, когда один из пределов (или оба) не существует, оказывается полезным устремить ε_1 и ε_2 к нулю так, чтобы они оставались равными:

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx\right) \tag{2.8.6}$$

Если этот предел существует, его называют главным значением несобственного интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Определение (главное значение)

Пусть функция $f(x)$ определена на всем отрезке $[a;b]$, за исключением, возможно, точки c, и интегрируема на любой части отрезка $[a;b]$, не содержащей точки c. Если существует предел (2.8.6), то этот предел называется *главным значением несобственного интеграла* $\int\limits_a^b f(x)dx$ и обозначается символом "V.p." (начальные буквы французских слов "Valeur principale", которые в переводе означают "главное значение"):

$$V.p. \int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^b f(x)dx\right) \tag{2.8.7}$$

Примеры

Если $c \in (a;b)$, то несобственный интеграл функции $f(x) = \frac{1}{x-c}$ по отрезку $[a;b]$ расходится. При этом главное значение такого интеграла существует:

$$V.p. \int\limits_a^b \frac{1}{x-c}dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int\limits_a^{c-\varepsilon} \frac{1}{x-c}dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^b \frac{1}{x-c}dx\right) = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\ln\left|\frac{-\varepsilon}{a-c}\right| + \ln\left|\frac{b-c}{\varepsilon}\right|\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} \ln\left|\frac{b-c}{a-c}\right| = \ln\left|\frac{b-c}{a-c}\right|$$