Интегралы и дифференциальные уравнения

Модуль 2. Определенный интеграл, несобственные интегралы

Лекция 2.5

Аннотация

Несобственные интегралы I рода.

Определение (ограниченное числовое множество)

1. Множество вещественных чисел X называется **ограниченным сверху**, если существует такое число M, что все числа из X не больше числа M:

$$\Big(X \subset \mathbb{R} \wedge X \ - \ \text{ограниченное сверху множество}\Big) \Longleftrightarrow \exists\, M\, \forall\, x\, \Big(x \in X \Rightarrow x \leqslant M\Big)$$

2. Множество вещественных чисел X называется **ограниченным снизу**, если существует такое число m, что все числа из X не меньше числа m:

$$\Big(X \subset \mathbb{R} \wedge X \ - \ \text{ограниченное снизу множество}\Big) \Longleftrightarrow \exists\, m\, \forall\, x\, \Big(x \in X \Rightarrow x \geqslant m\Big)$$

3. Множество вещественных чисел X называется **ограниченным**, если существуют такие числа m и M, что все числа из X не больше числа M и не меньше числа m:

$$\Big(X \subset \mathbb{R} \wedge X \ - \ \text{ограниченное множество}\Big) \Longleftrightarrow \exists\, m, M\, \forall\, x\, \Big(x \in X \Rightarrow m \leqslant x \leqslant M\Big)$$

Примеры

1. Лучи $(-\infty; -5]$, $(-\infty; 0)$, $(-\infty; \sqrt{3})$ являются ограниченными сверху множествами.

2. Лучи $[0; +\infty)$, $(-\sqrt{7}; +\infty)$, $\left(\frac{11}{3}; +\infty\right)$ являются ограниченными снизу множествами.

3. Интервал $\left(-\frac{5}{6}; -\frac{1}{3}\right)$, полуинтервал $(-1; 0]$ и отрезок $[\sqrt{2}; 5]$ представляют собой примеры ограниченных множеств.

4. Множество целых чисел $\mathbb{Z}$, множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$, множество действительных чисел $\mathbb{R}$ являются неограниченными множествами.

Понятие определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ имеет смысл только для ограниченных промежутков и ограниченных функций. В этой лекции мы расширим понятие определенного интеграла на случай неограниченных промежутков и получим несобственный интеграл I рода.

Определение (несобственный интеграл I рода)

Существует 3 вида несобственных интегралов I рода: $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$:

1. Если функция $f(x)$ определена на полупрямой $a \leqslant x \leqslant +\infty$ и для любого числа $b \geqslant a$ существует интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, то предел $\lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$ называют несобственным интегралом I рода функции f и обозначают символом $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.
2. Если функция $f(x)$ определена на полупрямой $-\infty \leqslant x \leqslant b$ и для любого числа $a \leqslant b$ существует интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, то предел $\lim\limits_{a\to-\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$ называют несобственным интегралом I рода функции f и обозначают символом $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx$.
3. Если функция $f(x)$ определена на прямой $-\infty \leqslant x \leqslant +\infty$ и для любых чисел a и b, таких что $a \leqslant b$, существует интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, то предел $\lim\limits_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}} \int\limits_a^b f(x)dx$ называют несобственным интегралом I рода функции f и обозначают символом $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

Если предел существует, то говорят, что несобственный интеграл сходится; если предел не существует или равен бесконечности, то говорят, что несобственный интеграл расходится.

Геометрический смысл: несобственный интеграл первого рода выражает площадь бесконечно длинной криволинейной трапеции.

Определение (абсолютная сходимость)

Если интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ сходятся, то говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится абсолютно.

Теорема

Если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ сходится, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ тоже сходится.

Определение (условная сходимость)

Если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, а интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ расходится, то говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится условно.

Примеры

1. $\int\limits_{-\infty}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)dx = \left| \begin{array}{c} z=\frac{1}{x} \Rightarrow x=\frac{1}{z} \Rightarrow dx=-\frac{dz}{z^2} \\ x=a \Rightarrow z=\frac{1}{a},\quad x=\frac{2}{\pi} \Rightarrow z=\frac{\pi}{2} \end{array} \right| =$

$= -\lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_{\frac{1}{a}}^{\frac{\pi}{2}} \cancel{z^2}\sin(z)\frac{dz}{\cancel{z^2}} = -\lim\limits_{a\to-\infty}\left(-\cos(z)\Big|_{\frac{1}{a}}^{\frac{\pi}{2}}\right) = -\lim\limits_{a\to-\infty}\left(\cos\left(\frac{1}{a}\right)\right) = -\cos\left(\lim\limits_{a\to-\infty}\frac{1}{a}\right) =$

$= -\cos(0) = -1$

2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}dx = \lim\limits_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}}\int\limits_a^b \frac{1}{x^2+1}dx = \lim\limits_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \operatorname{arctg}(x)\Big|_a^b = \lim\limits_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}}\Big(\operatorname{arctg}(b)-\operatorname{arctg}(a)\Big) =$

$= \lim\limits_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}(b) - \lim\limits_{a\to-\infty}\operatorname{arctg}(a) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$

3. $\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p} = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b\frac{dx}{x^p} = \lim\limits_{b\to+\infty}\begin{cases} \left.\frac{x^{1-p}}{1-p}\right|_a^b, & p\neq 1 \\ \ln|x|\Big|_a^b, & p=1 \end{cases} = \begin{cases} \lim\limits_{b\to+\infty}\frac{b^{1-p}-a^{1-p}}{1-p}, & p\neq 1 \\ \lim\limits_{b\to+\infty}\ln\left|\frac{b}{a}\right|, & p=1 \end{cases} =$

$= \begin{cases} \frac{-a^{1-p}}{1-p}, & p>1 \\ +\infty, & p\leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow$ несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ сходится при $p>1$ и расходится при $p\leqslant 1$.

4. $\int\limits_a^{+\infty}\cos(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b\cos(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\left(\sin(x)\Big|_a^b\right) = \lim\limits_{b\to+\infty}\Big(\sin(b)-\sin(a)\Big)$

Так как $\sin(b)$ при $b\to+\infty$ не стремится ни к какому пределу, несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty}\cos(x)dx$ расходится.

!

Определения, теоремы и свойства, которые будут изучаться далее, можно сформулировать для ВСЕХ типов несобственных интегралов, но для упрощения записи в формулах будут присутствовать только интегралы вида $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

Формула Ньютона-Лейбница.

Обозначим: $F(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$. Пусть $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$ на промежутке $[a; +\infty)$. Тогда для несобственного интеграла можно использовать **формулу Ньютона-Лейбница:**

$$\boxed{\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a)}$$

Формула интегрирования по частям.

Обозначим: $uv\Big|_a^{+\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty} u(x)v(x) - u(a)v(a)$. Пусть функции u, v и их производные определены и непрерывны во всех точках промежутка $[a; +\infty)$. Тогда справедлива **формула интегрирования по частям:**

$$\boxed{\int\limits_a^{+\infty} udv = uv\Big|_a^{+\infty} - \int\limits_a^{+\infty} vdu}$$

Формула замены переменной.

Пусть $f(x)$ – непрерывная на промежутке $[a; +\infty)$ функция. Пусть $x = g(t)$ – непрерывная и монотонно возрастающая на промежутке $[\alpha; \beta)$ функция (возможно, $\beta = +\infty$). Предположим, что

$$g(\alpha) = a \quad \text{и} \quad \lim_{t\to\beta} g(t) = +\infty$$

Если $g(t)$ имеет непрерывную производную на промежутке $[\alpha; \beta)$, то $dx = g'(t)dt$ при $t \in [\alpha; \beta)$. Тогда справедлива **формула замены переменной** в несобственном интеграле:

$$\boxed{\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_\alpha^{\beta} f(g(t)) \cdot g'(t)dt}$$

Свойства несобственного интеграла.

1. Пусть $b > a$. Из сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ вытекает сходимость интеграла $\int\limits_b^{+\infty} f(x)dx$ и наоборот, из сходимости интеграла $\int\limits_b^{+\infty} f(x)dx$ вытекает сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

2. Из сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ вытекает сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} C \cdot f(x)dx$ ($C = \text{const}$) и справедлива формула:

$$\int\limits_a^{+\infty} C \cdot f(x)dx = C \cdot \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \tag{2.7.1}$$

3. Из сходимости интегралов $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ вытекает сходимость интегралов $\int\limits_a^{+\infty} f(x) \pm g(x)dx$ и справедлива формула:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x) \pm g(x)dx = \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \pm \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx \tag{2.7.2}$$

Теорема (критерий Коши)

Для того, чтобы несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходился необходимо и достаточно, чтобы для любого числа $\varepsilon > 0$ можно было указать такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что при любых a, b, превосходящих $\delta(\varepsilon)$ выполнялось неравенство $\left|\int\limits_a^{b} f(x)dx\right| < \varepsilon$:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \quad \left(\Big(a > \delta(\varepsilon)\ \wedge\ b > \delta(\varepsilon)\Big) \Rightarrow \left|\int\limits_a^{b} f(x)dx\right| < \varepsilon\right)$$

Теорема (общий признак сравнения 1)

Если на полупрямой $[a; +\infty)$ выполняется неравенство $|f(x)| \leqslant g(x)$, то из сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

Теорема (общий признак сравнения 2)

Предположим, что функции $f(x)$ и $g(x)$ на полупрямой $[a; +\infty)$ принимают только положительные значения. Если существует положительное число C такое, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = C$, то из сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, а из расходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

Выбирая конкретную функцию для сравнения, можно получить частные признаки сравнения. С практической точки зрения удобно проводить сравнения со степенной функцией x^p.

Теорема (частный признак сравнения)

Если существует число $C > 0$ такое, что $\lim\limits_{x\to+\infty} |f(x)| \cdot x^p = C$, то

- при $p > 1$ интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится;
- при $p \leqslant 1$ интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится.

Примеры

1. Выяснить, сходится или расходится интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3}}{1+x^2}dx$.

В данном случае $f(x) = \frac{\sqrt{x^3}}{1+x^2} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2} \Rightarrow |f(x)|{\cdot}x^p = \frac{x^{\frac{3}{2}+p}}{1+x^2}$. Для того, чтобы предел отношения двух степенных функций был равен отличному от нуля числу, наибольшие показатели степеней этих функций должны совпадать; следовательно, $\frac{3}{2} + p = 2 \Leftrightarrow p = \frac{1}{2} \Rightarrow$ согласно пункту (2) частного признака сравнения интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3}}{1+x^2}dx$ расходится.

2. Выяснить, сходится или расходится интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}dx$.

В данном случае $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow |f(x)| \cdot x^p = \frac{x^p}{x^2\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^p}{x^2\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = 1 \Longleftrightarrow p = 2$$

Согласно пункту (1) частного признака сравнения интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}dx$ сходится.

Общий и частный признаки сравнения позволяют установить только абсолютную сходимость несобственных интегралов. Укажем признак сходимости, пригодный и для случая условной сходимости.

Теорема (признак Дирихле-Абеля)

Предположим, что

1. функция $f(x)$

- непрерывна на полупрямой $[a; +\infty)$,
- имеет на полупрямой $[a; +\infty)$ ограниченную первообразную;

2. функция $g(x)$

- не возрастает на полупрямой $[a; +\infty)$,
- имеет на полупрямой $[a; +\infty)$ непрерывную производную,

- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0.$

Тогда несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится.

Примеры

1. Выяснить, сходится или расходится интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^a}dx,\ a > 0.$

Будем считать, что $f(x) = \sin(x),\ g(x) = \frac{1}{x^a}.$

(a) функция $\sin(x)$

- непрерывна на полупрямой $[1; +\infty)$,
- имеет на полупрямой $[1; +\infty)$ ограниченную первообразную $-\cos(x)$;

(b) функция $\frac{1}{x^a}$

- убывает на полупрямой $[1; +\infty)$,
- имеет на полупрямой $[1; +\infty)$ непрерывную производную $-\frac{a}{x^{a+1}}$,
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^a} = 0$ (т.к. $a > 0$).

Мы видим, что все условия признака Дирихле-Абеля выполнены $\Rightarrow$ интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^a}dx$ сходится.

2. Выяснить, сходится или расходится интеграл Френеля $\int\limits_0^{+\infty} \sin(x^2)dx.$

Воспользуемся свойством (1) несобственных интегралов и рассмотрим вместо интеграла $\int\limits_0^{+\infty} \sin(x^2)dx$ интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \sin(x^2)dx$. Преобразуем подынтегральное выражение:

$$\int\limits_1^{+\infty} \sin(x^2)dx = \int\limits_1^{+\infty} \sin(x^2)\cdot x\cdot \frac{1}{x}dx$$

Будем считать, что $f(x) = \sin(x^2)\cdot x,\ g(x) = \frac{1}{x}.$

(a) функция $\sin(x^2)\cdot x$

- непрерывна на полупрямой $[1; +\infty)$,
- имеет на полупрямой $[1; +\infty)$ ограниченную первообразную $-\frac{1}{2}\cos(x^2)$;

(b) функция $\frac{1}{x}$

- убывает на полупрямой $[1; +\infty)$,
- имеет на полупрямой $[1; +\infty)$ непрерывную производную $-\frac{1}{x^2}$,

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$

Мы видим, что все условия признака Дирихле-Абеля выполнены $\Rightarrow$ интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \sin(x^2)dx$ сходится; по свойству (1) несобственных интегралов сходится и интеграл Френеля $\int\limits_{0}^{+\infty} \sin(x^2)dx$.

Как мы уже сказали ранее, несобственный интеграл с бесконечными пределами определяется равенством

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int\limits_{a}^{b} f(x)dx\,, \tag{2.7.3}$$

в котором предельные переходы по a и b предполагаются независимыми друг от друга. Может оказаться так, что предел (2.7.3) не существует, но существует предел, при котором a и b изменяются "синхронно" и связаны между собой соотношением $a = -b$. Такой предел называют главным значением интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

Определение (главное значение)

Пусть функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой $(-\infty; +\infty)$ и интегрируема на любом сегменте, принадлежащем этой прямой. Если существует предел $\lim\limits_{a\to+\infty} \int\limits_{-a}^{a} f(x)dx$, то этот предел называется *главным значением несобственного интеграла* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ и обозначается символом "V.p." (начальные буквы французских слов "Valeur principale", которые в переводе означают "главное значение"):

$$V.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to+\infty} \int\limits_{-a}^{a} f(x)dx \tag{2.7.4}$$

Примеры

$V.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin(x)dx = \lim\limits_{a\to+\infty} \int\limits_{-a}^{a} \sin(x)dx = \lim\limits_{a\to+\infty} \left(-\cos(x)\Big|_{-a}^{a} \right) = \lim\limits_{a\to+\infty} 0 = 0$

Теорема

1. Если функция $f(x)$ – нечетная, то главное значение всегда существует и равно нулю: $V.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\text{нечет}}(x)dx = 0$

2. Если функция $f(x)$ – четная, то главное значение существует тогда и только тогда, когда сходится интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} f(x)dx$: $V.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\text{чет}}(x)dx = 2\int\limits_{0}^{+\infty} f_{\text{чет}}(x)dx$.

Любую функцию можно представить в виде суммы четной и нечетной функций: $f(x) = f_{\text{нечет}}(x) + f_{\text{чет}}(x)$; из теоремы следует, что

$$V.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{+\infty} f_{\text{чет}}(x)dx \tag{2.7.5}$$

Примеры

Функция $f(x) = \frac{1+x}{1+x^2}$ состоит из четной части $f_{\text{чет}}(x) = \frac{1}{1+x^2}$ и нечетной части $f_{\text{нечет}}(x) = \frac{x}{1+x^2}$, следовательно,

$$V.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2}dx = 2\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\lim_{a\to+\infty}\int\limits_{0}^{a} \frac{dx}{1+x^2} = 2\lim_{a\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}(x)\Big|_0^a\right) = 2\lim_{a\to+\infty}\operatorname{arctg}(a) = \pi$$