Аналитическая геометрия

Модуль 2. Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве

Лекция 7

Аннотация

Линии второго порядка на плоскости: эллипс, гипербола, парабола. Определение, общие характеристики. Каноническое уравнение, исследование формы. Эксцентриситет, директрисы. Общее уравнение кривой.

§14. Линии второго порядка

<u>*Опр.*</u> **Алгебраической линией (кривой) второго порядка** называется геометрическое место точек плоскости, которое в декартовой системе координат Oxy задается уравнением второй степени относительно текущих координат

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0\,. \tag{14.1}$$

Коэффициенты этого уравнения - действительные числа, но по крайней мере одно из чисел A, B или C отлично от нуля.

Ниже будет показано, что это уравнение определяет на плоскости окружность, эллипс, гиперболу или параболу. Прежде, чем переходить к этому утверждению, изучим свойства перечисленных кривых.

14.1. Окружность, ее каноническое уравнение

<u>*Опр.*</u> **Окружностью** называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от заданной точки, называемой **центром**.

Пусть точка $M(x, y)$ принадлежит окружности, тогда по определению (рис. 14.1) $|M_0M| = R$, т.е.

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2}\,. \tag{14.2}$$

Уравнение (14.2) называется **каноническим уравнением окружности** с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$ и радиусом R**.**

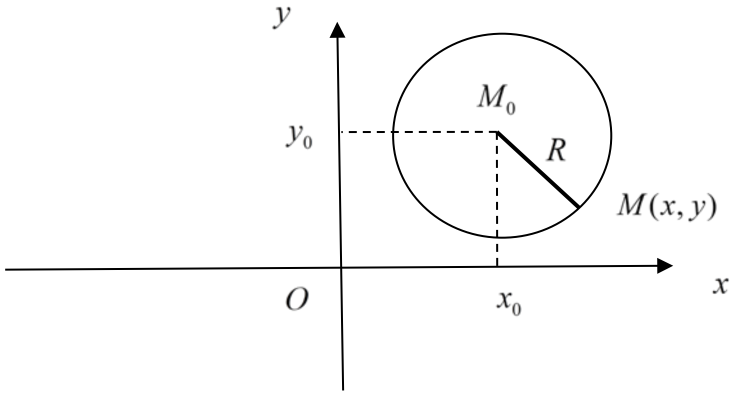

Рис. 14.1.

В частности, **уравнение окружности с центром в начале координат** есть

$$\boxed{x^2 + y^2 = R^2}. \qquad (14.3)$$

<u>Пример.</u> Найти центр и радиус окружности $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$.

Решение. Выделим полные квадраты в выражениях, содержащих одну и ту же переменную:

$x^2 + 2x = (x^2 + 2x + 1) - 1 = (x+1)^2 - 1$, $y^2 - 4x = (y^2 - 2\cdot 2\cdot y + 4) - 4 = (y-2)^2 - 4$.

Тогда уравнение

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9,$$

согласно (14.2), определяет окружность с центром в точке $(-1,2)$ и радиусом $R = \sqrt{9} = 3$.

<u>Пример.</u> Написать уравнение линии центров окружностей $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ и $x^2 + 2x + y^2 + y = 1$.

Решение. Найдем центр второй окружности:

$$x^2 + 2x + y^2 + y = (x+1)^2 - 1 + (y + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4},$$

$$(x+1)^2 - 1 + (y + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} = 1,$$

$$(x+1)^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{2}.$$

Имеем центр первой окружности находится в точке $O_1(-1,2)$ (см. предыдущий пример), второй - $O_2\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$. Уравнение линии центров – уравнение прямой, проходящей через точки O_1 и O_2. Воспользуемся уравнением (11.4): $\frac{x-(-1)}{-1-(-1)}=\frac{y-2}{-1/2-2}$ или $\frac{x+1}{0}=\frac{y-2}{-5/2}$. Отсюда $x+1=0$.

14.2. Эллипс

14.2.1. Каноническое уравнение эллипса

<u>*Опр.*</u> **Эллипсом** называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых **фокусами**, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

Чтобы вывести уравнение эллипса расположим его фокусы F_1 и F_2 на оси Ox симметрично оси Oy. Обозначим расстояние между фокусами $|F_1F_2|=2c$ (рис. 14.2). Тогда в выбранной системе координат xOy координаты точек $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$.

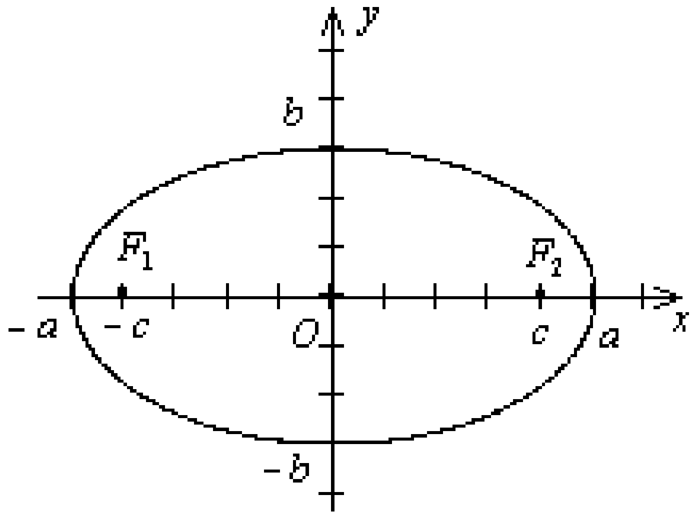

Рис. 14.2.

Пусть $M(x,y)$ - произвольная точка, принадлежащая эллипсу, а $|MF_1|+|MF_2|=2a$ и по определению эллипса $2a>2c$, где $2a$ - упоминаемая в определении постоянная величина.

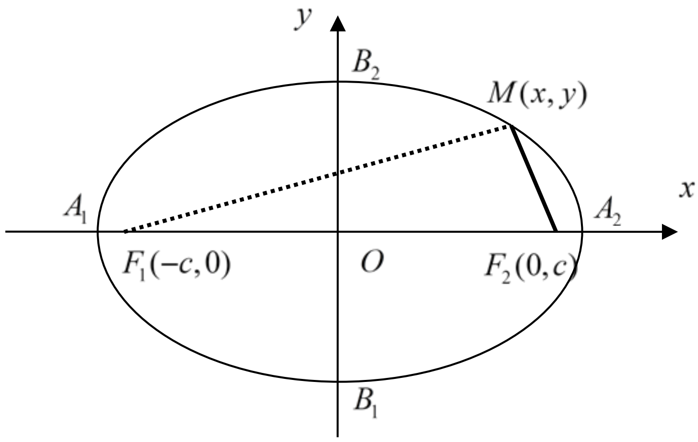

Рис. 14.3.

Используя формулу (10.4) расстояния между двумя точками, получаем

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$

Это, по сути, и есть уравнение эллипса. Если второе слагаемое в левой части равенства перенести в правую часть и возвести обе части в квадрат, то получим

$$a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}=a^2-cx.$$

Далее возведем обе части этого равенства в квадрат и разделим полученное равенство на $a^2(a^2-c^2)$. Полагая $\boxed{a^2-c^2=b^2}$, придем к **каноническому уравнению эллипса**

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}. \qquad (14.4)$$

14.2.2. Исследование формы эллипса по его уравнению. Геометрические свойства эллипса

1. Т.к. уравнение (14.4) содержит четные степени текущих координат x и y, то эллипс симметричен относительно осей Ox и Oy и относительно точки $O(0,0)$, которую называют **центром эллипса**.

2. Точки $A_1(-a,0)$ и $A_2(a,0)$ - точки пересечения эллипса с осью Ox (при $y=0$), точки $B_1(0,-b)$ и $B_2(0,b)$ - точки пересечения эллипса с осью Oy (при $x=0$) (рис. 14.3).

Точки A_1, A_2, B_1, B_2 - **вершины эллипса**. Отрезки $|A_1A_2|=2a$ и $|B_1B_2|=2b$ называются соответственно **большой и малой осями эллипса**, числа a и b - соответственно **большой и малой полуосями эллипса**. Расстояние $|F_1F_2|=2c$ называют **фокальным (фокусным) расстоянием эллипса** (c - **полуфокусное расстояние**), а ось, на которой лежат фокусы - **фокальной осью эллипса**.

3. Все точки эллипса лежат внутри прямоугольника, образованного прямыми $x=\pm a$, $y=\pm b$, т.к. имеют место неравенства $\frac{x^2}{a^2}\le 1$ и $\frac{y^2}{b^2}\le 1$, т.е. $-a\le x\le a$ и $-b\le y\le b$.

4. Форма эллипса характеризуется отношением половины расстояния между фокусами к его большой полуоси. Это отношение называется **эксцентриситетом эллипса** и обозначается ε:

$$\boxed{\varepsilon=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}}. \qquad (14.5)$$

$0<\varepsilon<1$, т.к. $0<c<a$.

Чем больше ε, тем больше расстояние от центра до фокусов и тем более сплющенным будет эллипс. При $\varepsilon=0$ $\frac{b}{a}=1$, т.е. $b=a$. При этом эллипс становится окружностью $x^2+y^2=a^2$.

5. Уравнение эллипса можно записать в виде

$$\frac{|F_1M|}{a/\varepsilon-x}=\varepsilon,$$

т.е. эллипс состоит их таких точек $M(x,y)$ плоскости, для которых отношение длины фокального радиуса F_1M к расстоянию до прямой $x=\frac{a}{\varepsilon}$ есть величина постоянная, равная ε (рис. 14.4).

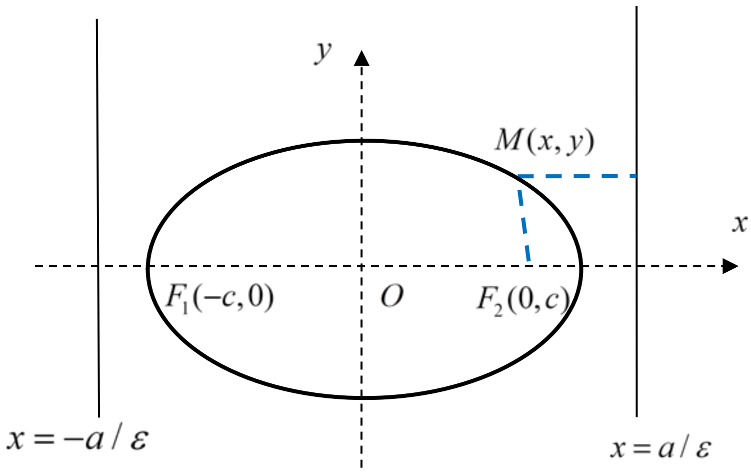

Рис. 14.4.

Аналогично, отношение $\frac{|F_2M|}{-a/\varepsilon-x}=\varepsilon$ (длины фокального радиуса F_2M к расстоянию до прямой $x=-\frac{a}{\varepsilon}$ есть величина постоянная, равная ε).

Прямые $\boxed{x=\pm\frac{a}{\varepsilon}}$ называют **директрисами эллипса**. Они перпендикулярны той оси эллипса, на которой расположены фокусы.

Расстояние $\boxed{p=\frac{a}{\varepsilon}-c=\frac{b^2}{c}}$ от директрисы до ближайшего к ней фокуса называют **фокальным параметром эллипса**.

Замечания.

1. Из соотношения $a^2-c^2=b^2$ можно определить положение фокусов, построив прямоугольный треугольник по катету b и гипотенузе a.

2. Если фокусы эллипса $F_1(0,-c)$ и $F_2(0,c)$ расположены на оси Oy (рис. 14.5), то большая ось эллипса $2b$ лежит на оси Oy, малая $2a$ - на оси Ox. Следовательно, $a<b$ и $\boxed{b^2-c^2=a^2}$, $\boxed{\varepsilon=\frac{c}{b}}$. Уравнение эллипса не меняется.

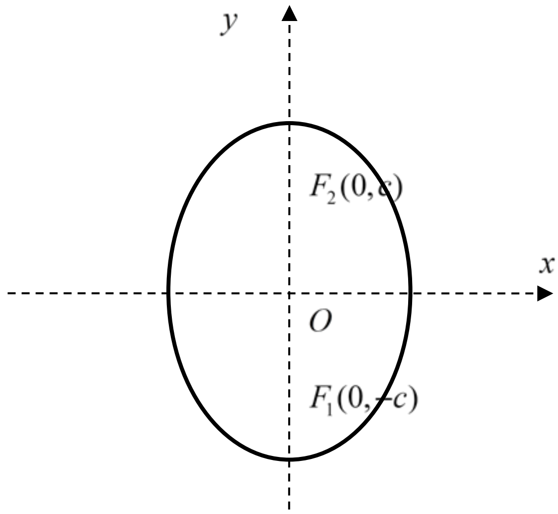

Рис. 14.5.

3. Уравнение эллипса, центр которого находится не в начале координат, а в некоторой точке $O_1(x_0, y_0)$, при этом оси симметрии параллельны координатным осям, имеет вид (рис. 14.6):

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1}. \tag{14.6}$$

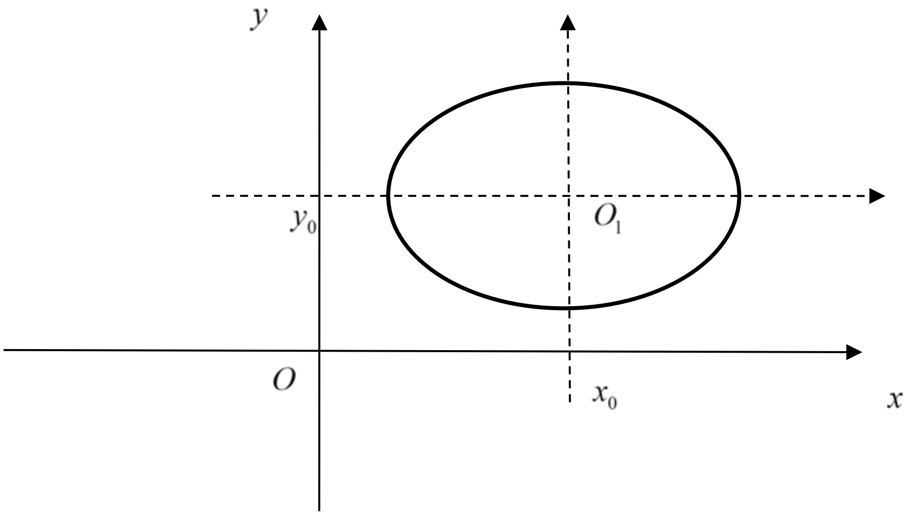

Рис. 14.6.

Координаты фокусов - $F_1(x_0 - c, y_0)$, $F_2(x_0 + c, y_0)$. Уравнения директрис - $x = x_0 \pm \dfrac{a}{\varepsilon}$.

4. К кривым второго порядка эллиптического типа относятся также **мнимый эллипс** $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1}$ и **точка** $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0}$.

Пример. Найти эксцентриситет эллипса $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{25} = 1$.

Решение. Т.к. $b^2 > a^2$, то фокусы лежат на оси Oy и поэтому $b^2 - c^2 = a^2$, т.е. $b^2 - a^2 = c^2 \Rightarrow c^2 = 25 - 16 = 9$, $c = 3$. $\varepsilon = \dfrac{c}{b} = \dfrac{3}{5} = 0,6$.

14.3. Гипербола

14.3.1. Каноническое уравнение гиперболы

Опр. **Гиперболой** называется множество всех точек плоскости, разность расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых **фокусами**, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

Для вывода уравнения гиперболы расположим ее фокусы F_1 и F_2 на оси Ox симметрично оси Oy. Обозначим расстояние между фокусами $|F_1F_2| = 2c$ (рис. 14.7). Тогда в выбранной системе координат xOy координаты точек $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$.

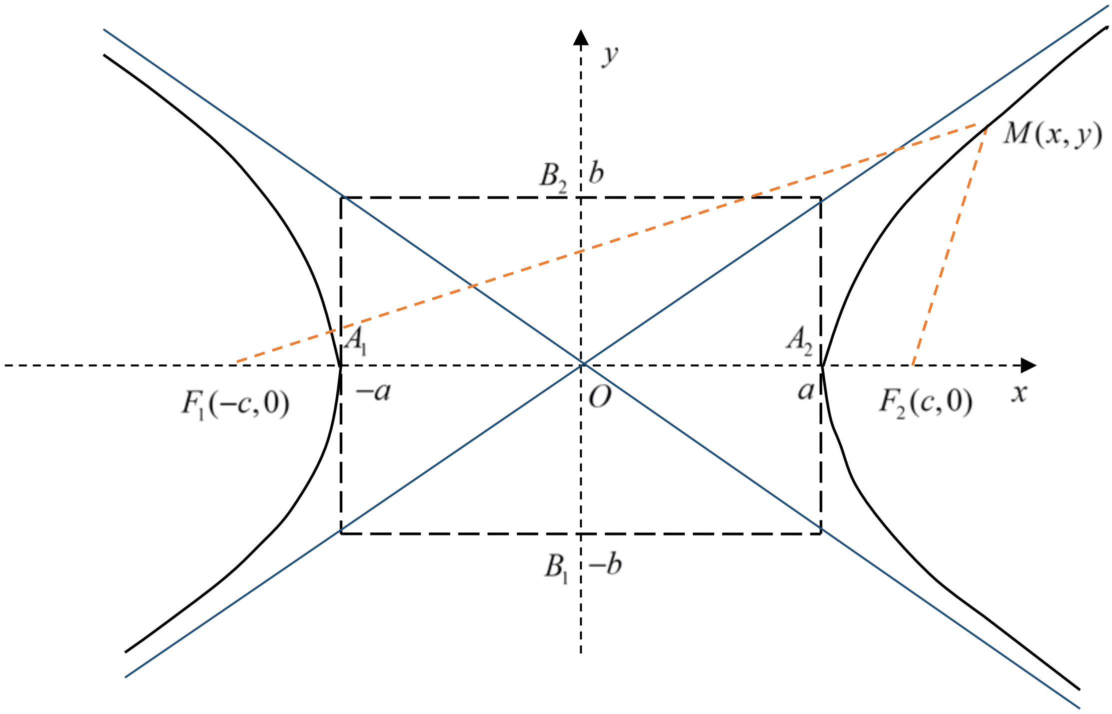

Рис. 14.7.

Пусть $M(x, y)$ - произвольная точка, принадлежащая гиперболе, а $|MF_1| - |MF_2| = \pm 2a$ и по определению гиперболы $2a < 2c$, т.е. $a < c$.

Используя формулу (10.4) расстояния между двумя точками, получаем

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

После преобразований, как это было сделано при выводе уравнения эллипса, получим **каноническое уравнение гиперболы**

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}, \tag{14.7}$$

где $\boxed{a^2 + c^2 = b^2}$.

14.3.2. Исследование формы гиперболы по ее уравнению. Геометрические свойства гиперболы

1. Т.к. уравнение (14.7) содержит четные степени текущих координат x и y, то гипербола симметрична относительно осей Ox и Oy и относительно точки $O(0,0)$, которую называют **центром гиперболы**.

2. Точки $A_1(-a,0)$ и $A_2(a,0)$ - точки пересечения гиперболы с осью Ox (при $y=0$) - **вершины гиперболы** (рис. 14.7). Ось Oy гипербола не пересекает. Поэтому отрезок $|A_1A_2|=2a$ называют **действительной осью гиперболы**, $|B_1B_2|=2b$ - **мнимой осью гиперболы**, числа a и b - соответственно **действительной и мнимой полуосями гиперболы**.

Расстояние $|F_1F_2|=2c$ называют **фокусным (фокальным) расстоянием гиперболы** (c - **полуфокусное расстояние**), а ось, на которой лежат фокусы - **фокальной осью гиперболы**. Фокусы всегда лежат на действительной оси.

3. Все точки гиперболы лежат вне полосы, образованной прямыми $x=\pm a$ и, следовательно, гипербола состоит из двух отдельных ветвей, т.к. имеет место неравенство $\dfrac{x^2}{a^2}\geq 1$, т.е. $x\leq -a$ и $x\geq a$.

4. Можно показать, что при неограниченном удалении точек гиперболы от начала координат они неограниченно приближаются к прямым, проходящим через диагонали прямоугольника со сторонами $x=\pm a$, $y=\pm b$, т.е. к прямым $\boxed{y=\pm\dfrac{b}{a}x}$, которые являются **асимптотами гиперболы**.

5. **Эксцентриситет** гиперболы $\varepsilon=\dfrac{|F_1F_2|}{|A_1A_2|}$, т.е.

$$\boxed{\varepsilon=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}}. \qquad (14.8)$$

$\varepsilon>1$, т.к. $c>a$.

6. Для гиперболы выполняется такое же свойство, как и для эллипса:

$$\frac{|F_1M|}{a/\varepsilon-x}=\varepsilon \text{ и } \frac{|F_2M|}{-a/\varepsilon-x}=\varepsilon,$$

т.е. гипербола состоит из таких точек плоскости, для которых отношение расстояния до ближайшего фокуса к расстоянию до ближайшей **директрисы** есть величина постоянная, равная эксцентриситету ε.

Прямые $\boxed{x = \pm\frac{a}{\varepsilon}}$ называют **директрисами гиперболы**. Они также, как и у эллипса, перпендикулярны той оси, на которой расположены фокусы гиперболы.

Расстояние $\boxed{p = c - \frac{a}{\varepsilon} = \frac{b^2}{c}}$ от директрисы до ближайшего к ней фокуса называют **фокальным параметром гиперболы**.

Замечания.

1. Существует две гиперболы, соответствующие построенному прямоугольнику на рис. 14.7. Первая из них описывается каноническим уравнением (14.7), а вторая - уравнением

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1}. \tag{14.9}$$

Вторую гиперболу называют **сопряженной** по отношению к первой, а уравнение (14.9) **каноническим уравнением сопряженной гиперболы**. Действительная и мнимая оси первой гиперболы являются, соответственно, мнимой и действительной осями сопряженной гиперболы, а асимптоты у них общие. Фокусы сопряженной гиперболы $F_1(0,-c)$ и $F_2(0,c)$ расположены на оси Oy (рис. 14.8), эксцентриситет - $\boxed{\varepsilon = \frac{c}{b}}$. Уравнения директрис - $\boxed{y = \pm\frac{b}{\varepsilon}}$.

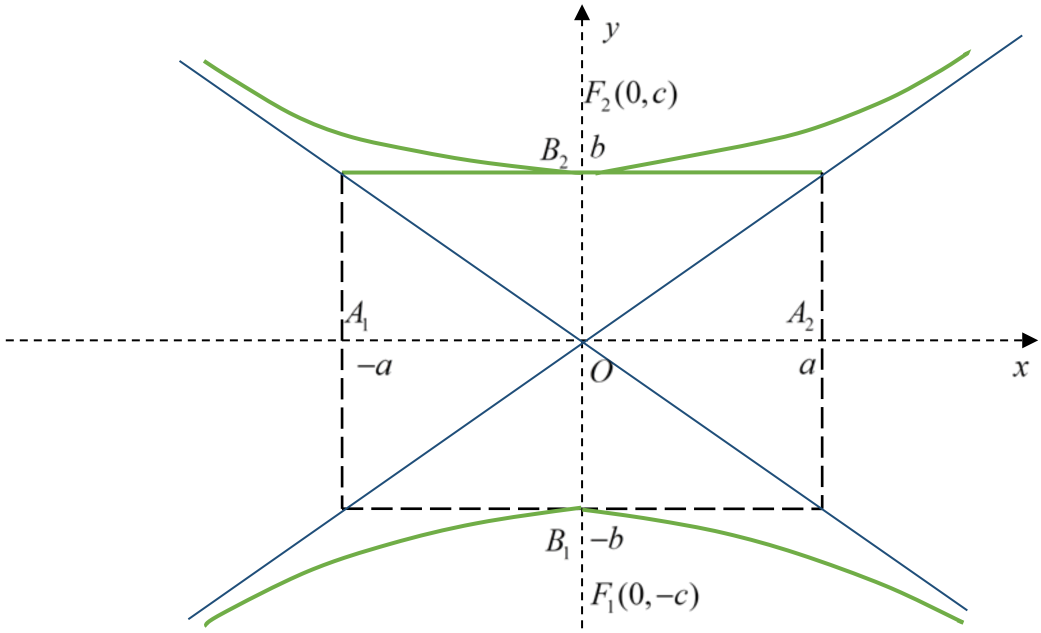

Рис. 14.8.

2. Уравнение гиперболы, центр которой находится не в начале координат, а в некоторой точке $O_1(x_0, y_0)$, при этом оси симметрии параллельны координатным осям, а фокусы лежат на оси, параллельной оси Ox имеет вид:

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1}. \tag{14.9}$$

Координаты фокусов - $F_1(x_0-c, y_0)$, $F_2(x_0+c, y_0)$. Уравнения директрис - $x = x_0 \pm \dfrac{a}{\varepsilon}$, асимптот - $y - y_0 = \pm\dfrac{b}{a}(x-x_0)$.

1. Если полуоси гиперболы равны $(a = b)$, то гипербола называется **равносторонней**. Ее каноническое уравнение

$$\boxed{x^2 - y^2 = a^2}. \tag{14.10}$$

Асимптоты равносторонней гиперболы имеют уравнения $\boxed{y = \pm x}$ и, следовательно, являются биссектрисами координатных углов.

4. К кривым второго порядка гиперболического типа относится также **пара пересекающихся прямых** $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0}$.

Пример. Найти координаты центра, фокусов и написать уравнения асимптот и директрис гиперболы $9x^2-16y^2+90x+32y-367=0$.

Решение. Приведем это уравнение к виду (14.9). Для этого:

1. Выпишем слагаемые, содержащие переменную x и выделим полный квадрат:

$$9x^2+90x=9(x^2+10x)=9\left((x^2+2\cdot 5\cdot x+5^2)-5^2\right)=$$
$$=9(x+5)^2-9\cdot 5^2=9(x-5)^2-225.$$

2. Выпишем слагаемые, содержащие переменную y и выделим полный квадрат:

$$-16y^2+32y=-16(y^2-2y)=-16\left((y^2-2\cdot 1y+1^2)-1^2\right)=$$
$$=-16(y-1)^2-(-16)\cdot 1^2=-16(y-1)^2+16.$$

3. Подставим полученные выражения в уравнение:

$$9(x-5)^2-225-16(y-1)^2+16-367=0,$$
$$9(x-5)^2-16(y-1)^2=576.$$

После деления обеих частей на 576 придем к уравнению

$$\frac{(x+5)^2}{64}-\frac{(y-1)^2}{36}=1, \qquad (*)$$

для которого центр находится в точке $O_1(-5;1)$, действительная полуось - $a=8$, мнимая - $b=6$, $c^2=a^2+b^2=64+36=100$, $c=10$.

4. Для определения координат фокусов, уравнений асимптот и директрис введем новую (вспомогательную) систему координат $O_1x'y'$, оси которой параллельны действующим координатным осям и одинаково с ними направлены, по формулам:

$$\begin{cases} x'=x+5, \\ y'=y-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=x'-5, \\ y=y'+1. \end{cases} \qquad (**)$$

Теперь для гиперболы, заданной каноническим уравнением $\frac{(x')^2}{64}-\frac{(y')^2}{36}=1$ (***) в новой системе координат, найдем то, что требуется:

а) Фокусы гиперболы (***) лежат на оси O_1x', параллельной оси Ox, и имеют координаты $F_1'(-10;0)$ и $F_2'(10;0)$. Тогда фокусы гиперболы (*) можно вычислить по формулам (**) $F_1(-10-5;0+1)$, $F_2(10-5;0+1)$ или $F_1(-15;1)$, $F_2(5;1)$.

б) Уравнения асимптот для гиперболы (***) найдем по формулам $y'=\pm\frac{b}{a}x'$, а для гиперболы (*) - $y-1=\pm\frac{b}{a}(x+5)$. Откуда получаем:

уравнения асимптот- $3x-4y+19=0$, $3x+4y+11=0$.

в) Директрисы перпендикулярны оси O_1x', на которой находятся фокусы. Их уравнения для гиперболы (***) найдем по формулам $x'=\pm\frac{a}{\varepsilon}$, а для гиперболы (*) - $x+5=\pm\frac{a}{\varepsilon}$, где $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{10}{8}=1,25$.

Откуда получаем:

уравнения директрис - $x=1,4$, $x=-11,4$ (рис.14.9).

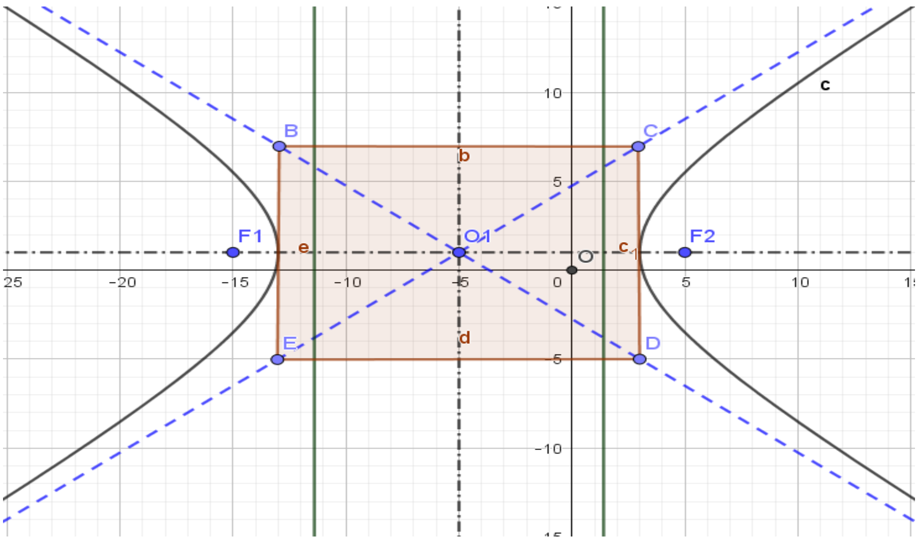

Рис. 14.9. Гипербола $\frac{(x+5)^2}{64}-\frac{(y-1)^2}{36}=1$.

14.4. Парабола

14.4.1. Каноническое уравнение параболы

Опр. **Параболой** называется множество всех точек плоскости, каждая из которых одинаково удалена от данной точки, называемой **фокусом**, и данной прямой, называемой **директрисой**. Расстояние от фокуса F до директрисы называется **параметром параболы** и обозначается через p $(p>0)$.

Для вывода уравнения гиперболы расположим ее фокус F на оси Ox, которая проходит перпендикулярно директрисе, а начало координат O расположим посередине между фокусом и директрисой (рис.14.10). Тогда в выбранной системе координат xOy координаты точки $F\left(\frac{p}{2},0\right)$, а уравнение директрисы $x=-\frac{p}{2}$.

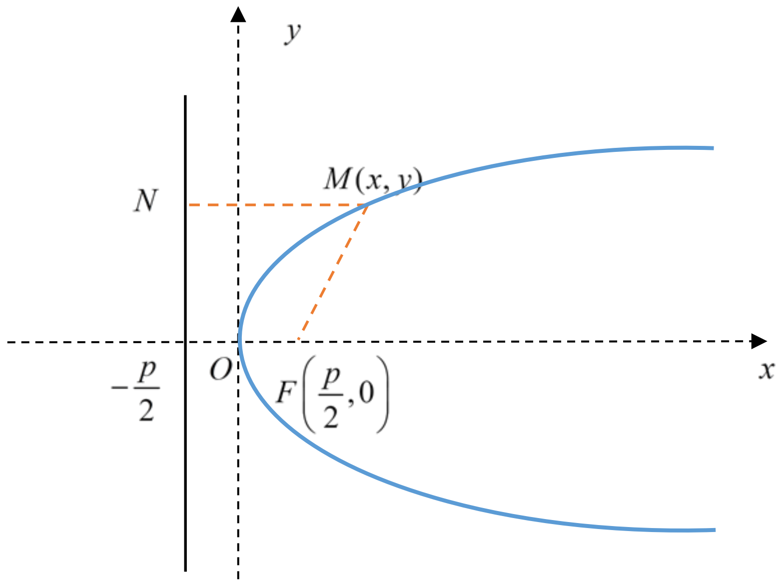

Рис. 14.10.

Пусть $M(x,y)$ - произвольная точка параболы. Тогда по определению $|MF|=|MN|$. Откуда по формуле (10.4) получаем

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}.$$

После возведения обеих частей в квадрат получим **каноническое уравнение**

параболы

$$\boxed{y^2 = 2px}. \qquad (14.11)$$

Полагают, что **эксцентриситет параболы** $\varepsilon = 1$.

14.3.2. Исследование формы параболы по ее уравнению. Геометрические свойства параболы

1.В уравнении (14.11) переменная y входит в четной степени, значит, парабола симметрична относительно оси Ox, которая является **осью симметрии параболы.**

2. Так как $p > 0$, то из (14.11) следует, что $x \geq 0$. Следовательно, парабола расположена справа от оси Oy.

3. При $x = 0$ имеем $y = 0$. Значит, парабола проходит через начало координат. Точку $O(0,0)$ называют **вершиной параболы**, отрезок $|FM| = r$ - **фокальным радиусом точки** M.

4. При неограниченном возрастании x модуль y также неограниченно возрастает.

Замечания.

1. Уравнения $y^2 = -2px$, $x^2 = 2py$ и $x^2 = -2py$ $(p > 0)$ также определяют параболы (рис. 14.11-14.13).

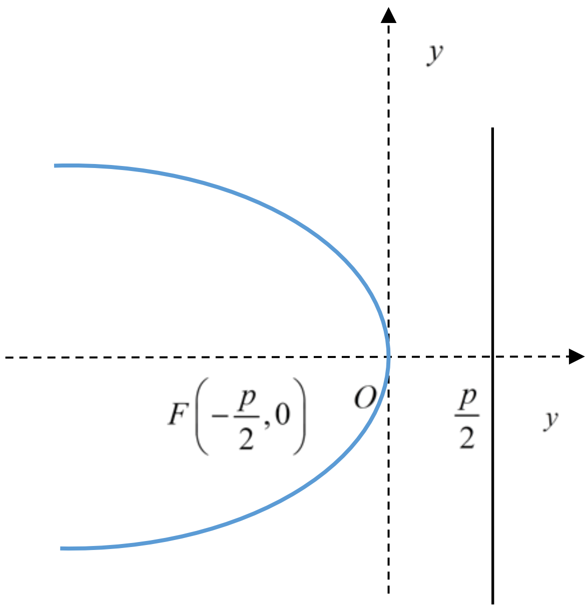

Рис. 14.11. Парабола $y^2 = -2px$.

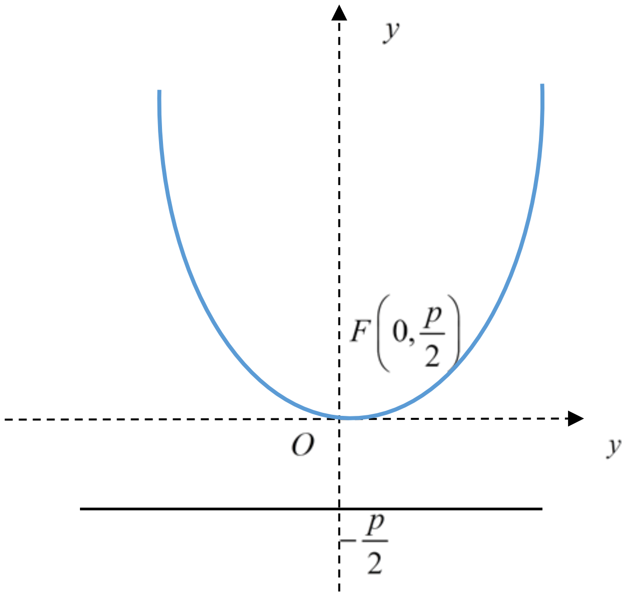

Рис. 14.12. Парабола $x^2 = 2py$.

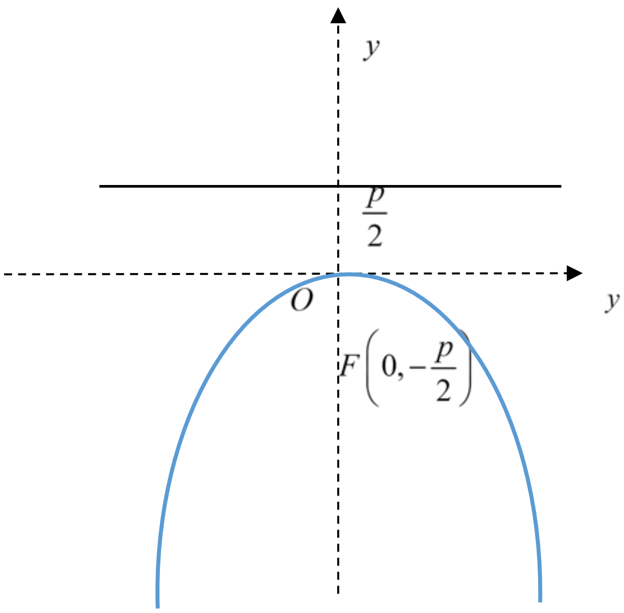

Рис. 14.13. Парабола $x^2 = -2py$.

2. Если вершина параболы находится в точке $O_1(x_0, y_0)$ и ось симметрии параллельна Ox, то ее уравнение имеет вид

$$\boxed{(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0)}. \tag{14.12}$$

Фокус находится в точке $F\left(x_0+\dfrac{p}{2}, y_0\right)$, уравнение директрисы - $x = x_0 - \dfrac{p}{2}$.

3. К кривым второго порядка параболического типа относятся также $\boxed{(y-y_0)^2 = 0}$ - **пара совпадающих прямых**, $\boxed{y^2 = c^2}$ - **пара параллельных прямых**, $\boxed{y^2 = -c^2}$ - **пара мнимых параллельных прямых.**

Пример. Написать уравнение геометрического места точек, равноудаленных от прямой $x-1=0$ и от точки $F(-3;-2)$.

Решение. По определению множеством точек, равноудаленных от данной точки и прямой, является парабола.

Пусть $M(x,y)$ – произвольная точка искомой параболы, тогда $|MF| = \sqrt{(x+3)^2+(y+2)^2}$.

Расстояние от точки M до прямой $x-1=0$ вычисляется по формуле (11.9):

$$d = \frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|x-1|}{\sqrt{1^2+0^2}} = |x-1|.$$

Из условия задачи следует, что $|MF| = d$ и, следовательно, $|MF|^2 = d^2$. Тогда $(x+3)^2+(y+2)^2 = (x-1)^2$ и $x^2+6x+9+y^2+4y+4 = x^2-2x+1$. После преобразований получаем, что $(y+2)^2 = -8(x+1)$ – уравнение искомого геометрического места точек. Это парабола, симметричная относительно оси параллельной оси Ox, ветви направлены влево. Вершина параболы расположена в точке $O_1(-1;-2)$, параметр $p=4$. Фокус находится в точке $F(-1-\frac{4}{2},-2) \Leftrightarrow F(-3;-2)$. Уравнение директрисы $x=1$ (рис. 14.14).

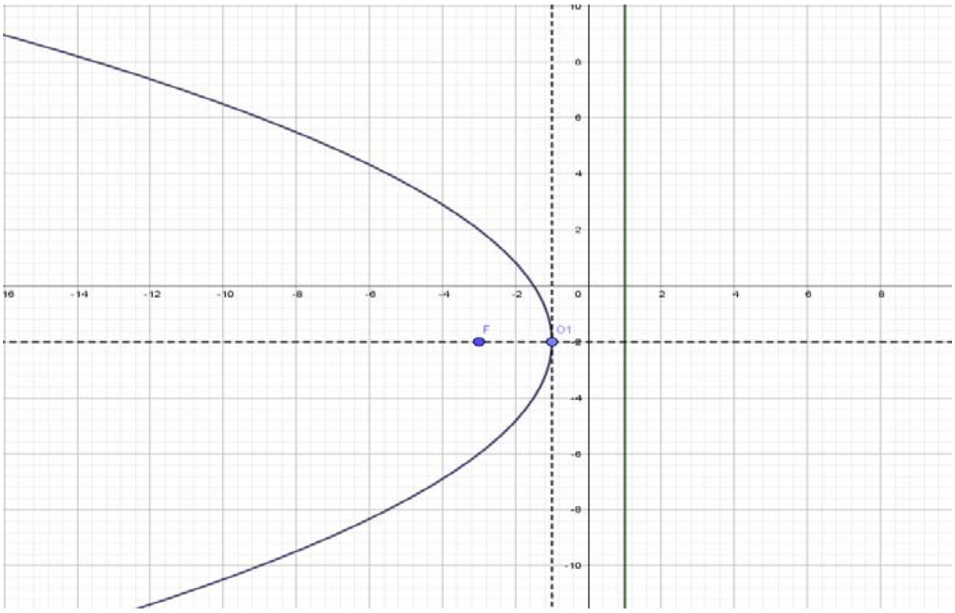

Рис. 14.14. Парабола $(y+2)^2=-8(x+1)$.