Аналитическая геометрия

Модуль 2. Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве

<u>Текст 6 (самостоятельное изучение)</u>

Аннотация

Уравнения прямой в пространстве: как линии пересечения двух плоскостей, канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через две заданные точки. Прямая и плоскость в пространстве. Исследование взаимного расположения прямой и плоскости, двух прямых в пространстве. Угол между двумя прямыми, угол между прямой и плоскостью. Расстояние от точки до прямой. Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми.

§13. Прямая в пространстве

13.1. Канонические уравнения прямой в пространстве

Рассмотрим на плоскости произвольную прямую *l*. Будем предполагать, что точка $M_0(x_0, y_0, z_0) \in l$, а ненулевой вектор $\vec{s} = (m, p, q)$ параллелен этой прямой или лежит на ней (рис. 13.1). Вектор $\vec{s}$ - **направляющий вектор прямой** *l*.

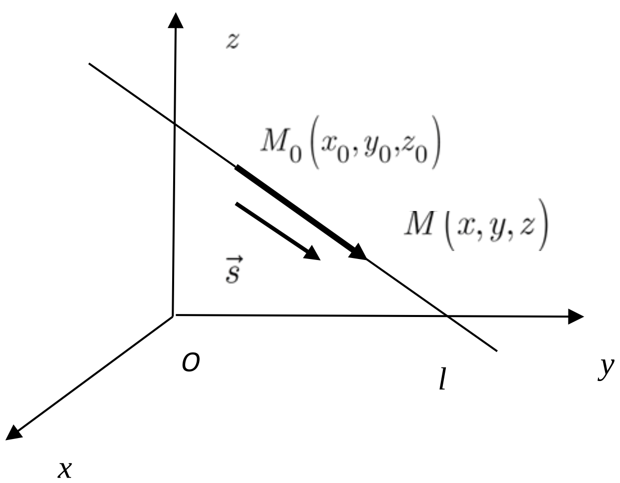

Рис. 13.1.

При таких условиях произвольная точка $M(x, y, z) \in l$ тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ коллинеарен вектору $\vec{s}$, т.е. их координаты пропорциональны:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{p} = \frac{z - z_0}{q}.} \tag{13.1}$$

Уравнения (13.1) называют **канонискими уравнениями прямой *l* в пространстве**.

13.2. Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две точки

Пусть в пространстве прямая l проходит через две точки $M_1(x_1, y_1, z_1) \in l$ и $M_2(x_2, y_2, z_2) \in l$. Вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ можно взять в качестве направляющего вектора прямой l.

Воспользовавшись уравнениями (13.1), составим уравнение прямой l, проходящей через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и имеющей направляющий вектор $\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2}$:

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.} \tag{13.2}$$

Уравнения (13.2) называют **уравнениями прямой, проходящей через две данные точки**.

13.3. Общие уравнения прямой в пространстве

Прямую *l* в пространстве можно рассматривать, как линию пересечения двух непараллельных плоскостей:

$$\boxed{\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}} \tag{13.3}$$

Уравнения (13.3) называются **общими уравнениями прямой в пространстве.**

Так как прямая *l* перпендикулярна нормальным векторам $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$, то за направляющий вектор этой прямой можно взять векторное произведение

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

13.4. Параметрические уравнения прямой в пространстве

Приравнивая уравнения (13.2) к некоторому параметру $t \in \mathrm{R}$, получим **параметрические уравнения прямой**:

$$\boxed{\begin{cases} x = mt + x_0, \\ y = pt + y_0, \\ z = qt + z_0. \end{cases}} \qquad (13.4)$$

13.5. Расстояние от точки до прямой

Пусть прямая *l* в пространстве задана своими каноническими уравнениями (13.1), где точка $M_0(x_0, y_0, z_0) \in l$, $\vec{s} = (m, p, q)$ - направляющий вектор прямой *l*. Найдем расстояние *d* от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до прямой *l*.

Построим параллелограмм на векторах $\overrightarrow{M_0M_1}$ и $\vec{s}$ (рис.13.2).

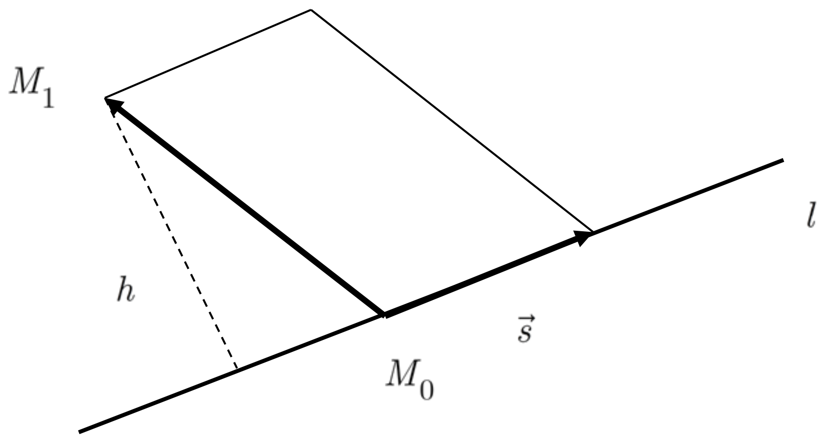

Рис. 13.2.

Тогда расстояние от точки M_1 до прямой l будет равно высоте h параллелограмма:

$$\boxed{d = \frac{S_{пар}}{|\vec{s}|} = \frac{\left|\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{s}\right|}{|\vec{s}|}.} \qquad (13.5)$$

Формула (13.5) – формула для вычисления **расстояния от точки до прямой.**

13.6. Расстояние между двумя прямыми

Если две прямые в пространстве пересекаются или совпадают, то расстояние между ними равно нулю. Поэтому имеет смысл говорить о расстоянии между скрещивающимися или параллельными прямыми.

Пусть в пространстве прямые l_1 и l_2 заданы своими каноническими уравнениями:

$$l_1 : \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{p_1} = \frac{z - z_1}{q_1}, \; l_2 : \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{p_2} = \frac{z - z_2}{q_2}.$$

<u>Случай 1.</u> Прямые l_1 и l_2 параллельны.

Тогда расстояние между прямыми l_1 и l_2 - есть расстояние от точки, например, $M_1 \in l_1$ до прямой l_2 и вычисляется по формуле (13.5).

Случай 2. Прямые l_1 и l_2 скрещиваются.

Опр. **Скрещивающими** называются прямые, которые невозможно поместить в одну плоскость, т.е. они не параллельны и не пересекаются.

Через две скрещивающиеся прямые можно провести две параллельные плоскости единственным образом. Расстояние между скрещивающимися прямыми есть расстояние между этими плоскостями и может быть найдено, как высота параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, $\vec{s}_1 = (m_1, p_1, q_1)$ и $\vec{s}_2 = (m_2, p_2, q_2)$ (рис. 13.3).

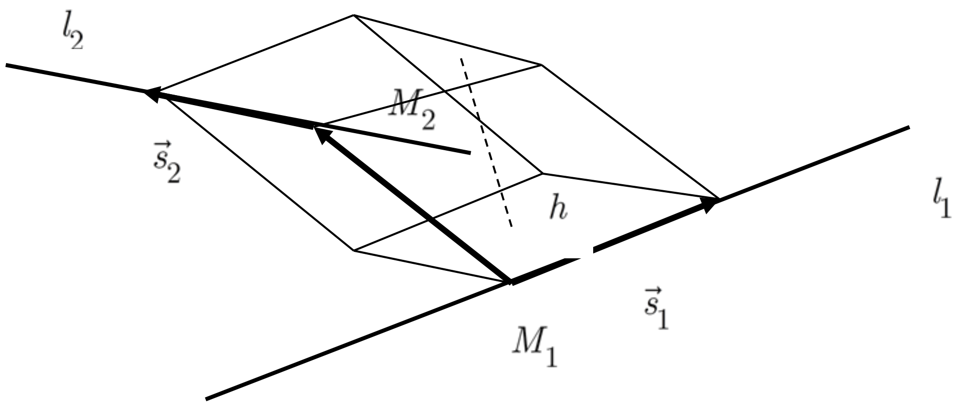

Рис. 13.3.

В результате получаем формулу для вычисления расстояния между скрещивающимися прямыми с помощью смешанного произведения векторов:

$$\boxed{d = \frac{V_{пар}}{\left|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2\right|} = \frac{\left|\vec{s}_1 \vec{s}_2 \overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2\right|}.} \tag{13.6}$$

13.7. Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Пусть две прямые l_1 и l_2 заданы своими каноническими уравнениями:

$$l_1 : \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{p_1} = \frac{z-z_1}{q_1}, \; l_2 : \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{p_2} = \frac{z-z_2}{q_2}.$$

1. Под **углом между прямыми** l_1 и l_2 будем понимать угол между их направляющими векторами $\vec{s}_1 = (m_1, p_1, q_1)$ и $\vec{s}_2 = (m_2, p_2, q_2)$:

$$\boxed{\cos(\widehat{l_1, l_2}) = \cos(\widehat{\vec{s}_1, \vec{s}_2}) = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\,\vec{s}_1\,| \cdot |\,\vec{s}_2\,|}.} \quad (13.7)$$

Условие параллельности прямых: $l_1 \,||\, l_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 \,||\, \vec{s}_2 \Leftrightarrow \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{p_1}{p_2} = \dfrac{q_1}{q_2}$.

Условие перпендикулярности прямых:

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 \perp \vec{s}_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 + p_1 \cdot p_2 = q_1 \cdot q_2 = 0.$$

2. **Прямые l_1 и l_2 лежат в одной плоскости** (т.е. либо пересекаются, либо параллельны), если векторы $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$ лежат в одной плоскости, т.е. компланарны:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & p_1 & q_1 \\ m_2 & p_2 & q_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (13.8)$$

13.8. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

Пусть в пространстве заданы прямая l своим каноническим уравнением и плоскость π общим уравнением:

$$l : \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{p} = \frac{z-z_0}{q}, \; \pi : Ax + By + Cz + D = 0.$$

1. **Углом** φ **между прямой и плоскостью** называется любой из двух смежных углов, образованных прямой и ее проекцией на плоскость (рис. 13.4).

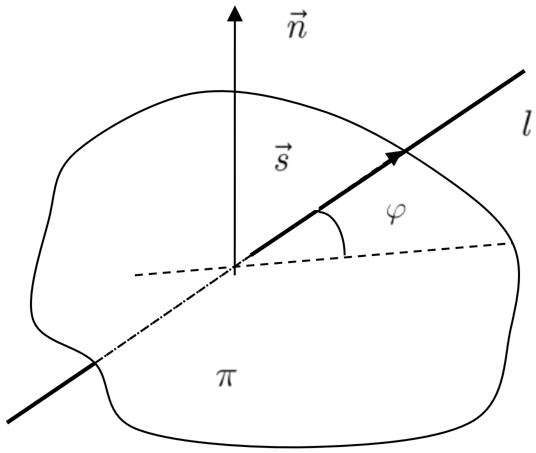

Рис. 13.4.

Тогда

$$\boxed{\cos(\widehat{\vec{s},\vec{n}}) = \cos(90^0 - \varphi) = \sin\varphi = \frac{\vec{s}\cdot\vec{n}}{|\,\vec{s}\,|\cdot|\,\vec{n}\,|}.} \tag{13.9}$$

Условие параллельности прямой и плоскости:

$$l \,||\, \pi \Leftrightarrow \vec{s} \perp \vec{n} \Leftrightarrow Am + Bp + Cq = 0\,.$$

Условие перпендикулярности прямой и плоскости:

$$l \perp \pi \Leftrightarrow \vec{s} \,||\, \vec{n} \Leftrightarrow \frac{m}{A} = \frac{p}{B} = \frac{q}{C}.$$

2. **Пересечение прямой с плоскостью.**

   Для нахождения точки пересечения прямой l и плоскости π удобно от канонических уравнений прямой l перейти к параметрическим (13.4). Подставив эти выражения для x, y и z в общее уравнение плоскости π, найдем значение параметра t, при котором прямая l и плоскость π пересекаются:

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bp + Cq}\ .$$

Затем подставим найденное значение t в параметрические уравнения прямой l и найдем координаты точки пересечения.

3. Одновременное выполнение равенств

$$\boxed{\begin{cases} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0, \\ Am + Bp + Cq = 0 \end{cases}} \qquad (13.10)$$

является **условием принадлежности прямой l плоскости π**.

4. **Расстояние между прямой и плоскостью.**

Если прямая l и плоскость π пересекаются, то расстояние между ними равно нулю. Если же они параллельны, то расстояние от прямой до плоскости есть расстояние от любой точки прямой до плоскости и может быть найдено по формуле (12.6).