Аналитическая геометрия

Модуль 1. Матричная алгебра. Векторная алгебра

Текст 5 (самостоятельное изучение)

Аннотация

Декартова прямоугольная система координат на плоскости и в пространстве. Формулы для расстояния между двумя точками и деления отрезка в данном отношении. Прямая на плоскости, её направляющий и нормальный векторы. Различные виды уравнения прямой на плоскости: прямая с угловым коэффициентом, параметрические уравнения, каноническое уравнение, уравнение в отрезках, общее уравнение. Взаимное расположение двух прямых на плоскости. Расстояние от точки до прямой. Нахождение угла между прямыми.

§10. Декартова прямоугольная система координат на плоскости и в пространстве

Под системой координат понимается способ, позволяющий численно описать положение точки. Одной из таких систем является **прямоугольная (декартова) система координат.**

На плоскости прямоугольная система координат задается двумя взаимно перпендикулярными прямыми – осями, на каждой из которых выбрано положительное направление и задан единичный (масштабный) отрезок. Эти оси называют **осями координат**, точку их пересечения O – **началом координат**. Одну из осей называют **осью абсцисс** (осью Ox), другую – **осью ординат** (осью Oy) (рис. 10.1).

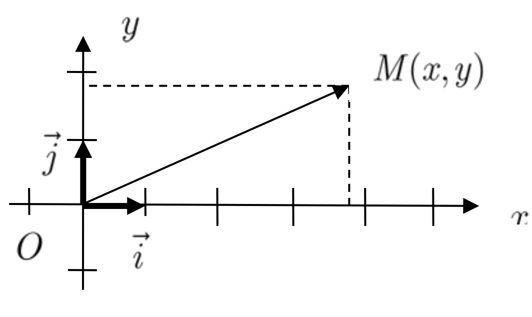

Рис. 10.1. Декартова система координат на плоскости.

Оси координат делят плоскость на четыре области – **четверти** (или **квадранты**).

Единичные векторы осей обозначают $\vec{i}$ и $\vec{j}$ ($|\vec{i}|=|\vec{j}|=1, \vec{i} \perp \vec{j}$).

Систему координат обозначают *Oxy*, а плоскость, в которой расположена система координат, называют **координатной плоскостью**.

Рассмотрим произвольную точку *M* в системе координат *Oxy*. Вектор $\overrightarrow{OM}$ называют **радиус-вектором** точки *M*.

Координатами точки *M* в системе координат *Oxy* называются координаты радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$. Если $\overrightarrow{OM}=(x,y)$, то координаты точки записываются так $M(x,y)$. Число *x* называется **абсциссой точки** *M*, а число *y* – **ординатой точки** *M*.

Числа *x* и *y* полностью определяют положение точки на плоскости: каждой паре чисел *x* и *y* соответствует единственная точка *M* плоскости, и наоборот.

Аналогичным образом можно ввести прямоугольную систему координат *Oxyz* в пространстве. Она описывается тремя взаимно перпендикулярными осями координат: **осью абсцисс** (осью *Ox*), **осью ординат** (осью *Oy*) и **осью аппликат** (осью *Oz*). (рис. 10.2).

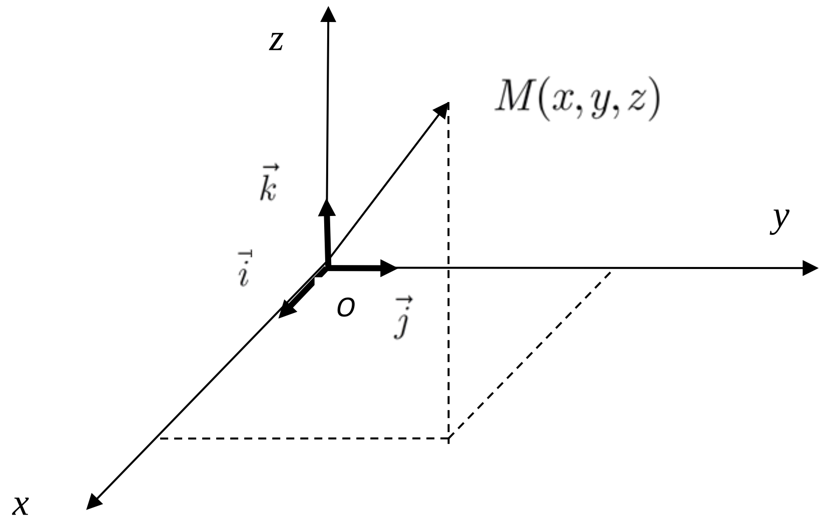

Рис. 10.2. Декартова система координат в пространстве.

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - единичные векторы соответственно осей *Ox, Oy* и *Oz*

$(|\,\vec{i}\,|=|\,\vec{j}\,|=|\,\vec{k}\,|=1,\ \vec{i}\perp\vec{j}\perp\vec{k})$.

10.1. Некоторые приложения метода координат

10.1.1. Деление отрезка в данном отношении

Пусть даны координаты точек $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ на плоскости. Требуется разделить отрезок *AB* в заданном отношении $\frac{m}{n}$, т.е. найти координаты точки $M(x,y)\in AB$ такой, что $\frac{AM}{MB}=\frac{m}{n}$ (рис. 10.3).

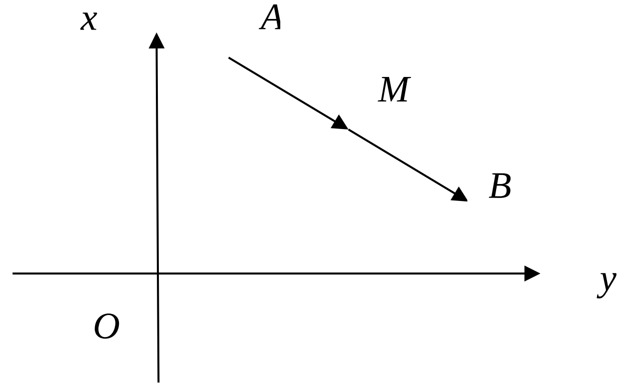

Рис. 10.3.

Рассмотрим векторы $\overrightarrow{AM}=(x-x_1,y-y_1)$ и $\overrightarrow{MB}=(x-x_2,y-y_2)$. Векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{MB}$ коллинеарны, поэтому $\overrightarrow{AM}=\frac{m}{n}\cdot\overrightarrow{MB}$.

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\frac{m}{n}\cdot\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}=\left(\frac{m}{n}+1\right)\cdot\overrightarrow{MB}=\frac{m+n}{n}\overrightarrow{MB}.$$

Приравнивая соответствующие координаты, получим

$$x_2-x_1=\frac{m+n}{n}(x-x_2),\ y_2-y_1=\frac{m+n}{n}(y-y_2).$$

Отсюда

$$\boxed{x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n},y=\frac{my_2+ny_1}{m+n}.}$$

В частности, если *M* – середина отрезка *AB*, то $\frac{m}{n}=1$ и

$$\boxed{x=\frac{x_2+x_1}{2},y=\frac{y_2+y_1}{2}.}$$

По этой же аналогии запишется формула деления отрезка в данном отношении в пространстве для трех координат:

$$\boxed{x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n},y=\frac{my_2+ny_1}{m+n},z=\frac{mz_2+nz_1}{m+n}.}$$

10.1.2. Расстояние между двумя точками (длина отрезка)

Расстояние *d* между двумя точками $A(x_1,y_1,z_1)$ и $B(x_2,y_2,z_2)$ равно длине вектора $\overrightarrow{AB}$, т.е.

$$\boxed{d=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.}$$

§11. Прямая на плоскости

11.1. Уравнение прямой, проходящей через точку перпендикулярно заданному вектору

Рассмотрим на плоскости произвольную прямую *l*. Будем предполагать, что точка $M_0(x_0, y_0) \in l$, а ненулевой вектор $\vec{n} = (A, B)$ перпендикулярен этой прямой (рис.11.1).

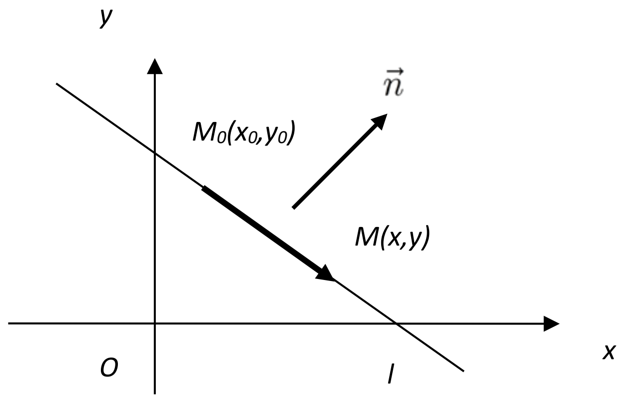

Рис. 11.1.

При таких условиях произвольная точка $M(x, y) \in l$ тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$ ортогонален вектору $\vec{n}$, т.е. их скалярное произведение равно нулю: $\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = (x - x_0, y - y_0) \cdot (A, B) = 0$. Отсюда

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.} \tag{11.1}$$

Вектор $\vec{n}$ называют **нормальным вектором прямой** *l* или **нормалью**, а точку M **текущей точкой прямой *l*.**

Уравнение (11.1) называют **уравнением прямой, проходящей через точку перпендикулярно заданному вектору**.

11.2. Общее уравнение прямой

Если в уравнении (11.1) раскрыть скобки и привести подобные слагаемые, то можно получить уравнение

$$\boxed{Ax + By + C = 0,} \tag{11.2}$$

называемое **общим уравнением прямой на плоскости**. Здесь $A,\ B,\ C \in \mathbf{R}$ и $A^2 + B^2 \neq 0$ (т. е. *A* и *B* не равны нулю одновременно).

Некоторые *частные случаи* общего уравнения прямой:

Значения коэффициентов	Вид общего уравнения	Графическое расположение
$A = 0, B \neq 0, C \neq 0$	$y = -\dfrac{C}{B}$	Прямая, параллельная оси *Ox*
$B = 0, A \neq 0, C \neq 0$	$x = -\dfrac{C}{A}$	Прямая, параллельная оси *Oy*
$C = 0, A \neq 0, B \neq 0$	$Ax + By = 0$	Прямая проходит через начало координат
$A = 0, C = 0, B \neq 0$	$y = 0$	Уравнение оси *Ox*
$B = 0, C = 0, A \neq 0$	$x = 0$	Уравнение оси *Oy*

11.3. Каноническое уравнение прямой

Рассмотрим на плоскости произвольную прямую *l*. Будем предполагать, что точка $M_0(x_0, y_0) \in l$, а ненулевой вектор $\vec{s} = (m, p)$ параллелен этой прямой или лежит на ней (рис. 11.2).

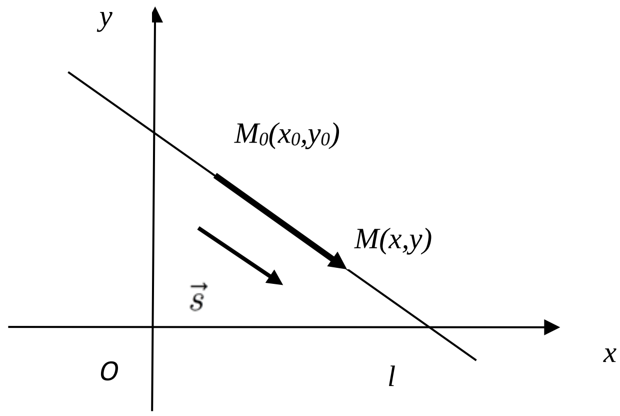

Рис. 11.2.

В этом случае вектор $\vec{s}$ называют **направляющим вектором прямой** *l*.

При таких условиях произвольная точка $M(x, y) \in l$ тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{M_0 M} = (x - x_0, y - y_0)$ коллинеарен вектору $\vec{s}$, т.е. их координаты пропорциональны:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{p}.} \tag{11.3}$$

Уравнение (11.3) называют **каноническим уравнением прямой** *l*.

11.4. Уравнение прямой, проходящей через две точки

Пусть прямая l задается двумя точками: $M_1(x_1, y_1) \in l$ и $M_2(x_2, y_2) \in l$. Тогда вектор $\overrightarrow{M_1 M_2}$ является направляющим вектором прямой l.

Составим уравнение прямой l, проходящей через точку $M_1(x_1, y_1)$ и имеющей направляющий вектор $\vec{s} = \overrightarrow{M_1 M_2}$:

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.} \tag{11.4}$$

Уравнение (11.4) называют **уравнением прямой, проходящей через две точки**.

11.5. Уравнение прямой в отрезках

Составим уравнение прямой l, проходящей через точки $A(a,0)$ и $B(0,b)$ (где $a \neq b$), являющиеся точками пересечения прямой с осями координат. Для этого воспользуемся уравнением (11.3):

$$\frac{x-a}{0-a} = \frac{y-0}{b-0}.$$

Откуда

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.} \qquad (11.5)$$

Уравнение (11.5) называют **уравнением прямой в отрезках**, т.к. числа a и b указывают, какие отрезки отсекает прямая на осях координат (рис. 11.3).

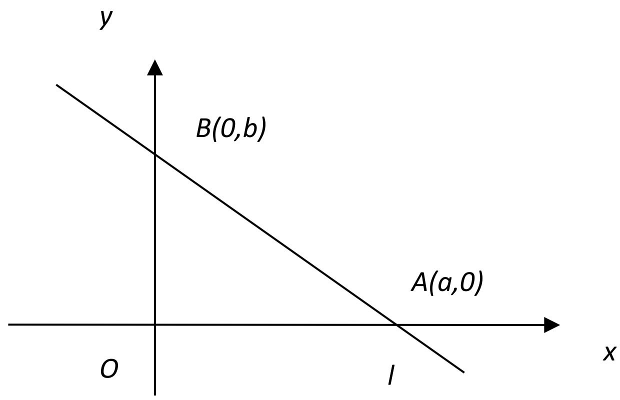

Рис. 11.3.

11.6. Параметрические уравнения прямой

Положим в уравнении (11.3) $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{p} = t$, где t – параметр. Тогда

$$\begin{cases} x = mt + x_0, \\ y = pt + y_0. \end{cases} \qquad (11.6)$$

Уравнения (11.6) называют **параметрическими уравнениями прямой**.

11.7. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Пусть на плоскости в прямоугольной декартовой системе координат *Oxy* задана прямая *l,* не параллельная оси *Oy*. Её положение вполне определяется ординатой в точке пересечения прямой l с осью *Oy* и углом α между положительным направлением оси *Ox* и прямой *l* .

Обозначим через α угол между прямыми *l* и *AB*: α = ∠ *MAB.* Тогда $tg\alpha = \dfrac{MB}{AB} = \dfrac{y-b}{x}$. Отсюда имеем: $y = xtg\alpha + b$ или

$$\boxed{y = kx + b,} \qquad (11.7)$$

где $k = tg\alpha$ называется **угловым коэффициентом прямой**, а уравнение (11.7) - **уравнением прямой с угловым коэффициентом**.

Уравнение

$$\boxed{y - y_0 = k(x - x_0)} \qquad (11.8)$$

с различными значениями k называют **уравнениями пучка прямых** с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$. Из этого пучка нельзя лишь определить прямую, параллельную оси *Oy*.

Частные случаи:

1) уравнение *y*=*kx* задает пучок прямых, проходящих через начало координат;

2) если прямая *l* параллельна оси *Ox*, то $\alpha = 0$ и, следовательно, $k = tg\alpha = 0$, и уравнение (11.6) примет вид: *y*=*b*;

3) если прямая *l* параллельна оси *Oy*, то уравнение прямой в этом случае будет иметь вид *x*=*a*, где *a* – абсцисса точки пересечения прямой *l* с осью *Ox*.

11.8. Расстояние от точки до прямой

Пусть в некоторой декартовой системе координат *xOy* задана прямая *l* своим общим уравнением $Ax + By + C = 0$ и точка $M_0(x_0, y_0) \notin l$. Найдем расстояние *d* от точки M_0 до прямой *l.*

Опр. **Расстоянием от точки до прямой** называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на данную прямую.

Пусть $P(x_1, y_1)$ - проекция точки *M* на прямую *l* (рис.11.4), тогда вектор $\overrightarrow{PM_0} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1)$ будет коллинеарен вектору нормали $\vec{n} = (A, B)$, а длина $\left|\overrightarrow{PM_0}\right| = d$.

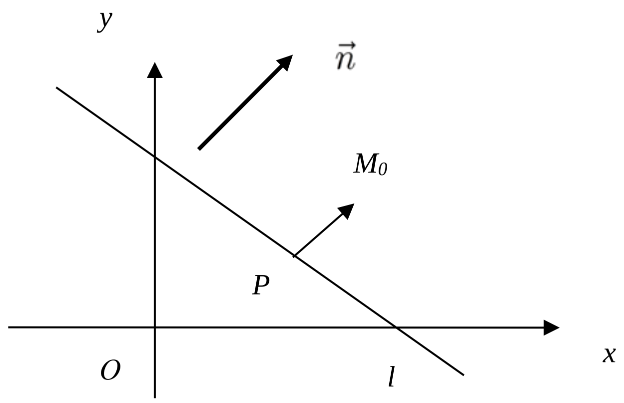

Рис. 11.4.

Скалярное произведение $\left(\vec{n}, \overrightarrow{PM_0}\right) = \left|\vec{n}\right|\left|\overrightarrow{PM_0}\right| = \left|\vec{n}\right| d$. Отсюда $d = \dfrac{\left(\vec{n}, \overrightarrow{PM_0}\right)}{\left|\vec{n}\right|}$.

Так как $P(x_1, y_1) \in l$, то $Ax_1 + By_1 + C = 0$. Поэтому

$$\left(\vec{n}, \overrightarrow{PM_0}\right) = A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) = Ax_0 + By_0 - (Ax_1 - By_1) = Ax_0 + By_0 + C.$$

Отсюда

$$\boxed{d = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}.} \qquad (11.9)$$

Формула (11.9) – формула для вычисления **расстояния от точки до прямой.**

Пример. Найти длину высоты *CH* треугольника *ABC*, если заданы координаты вершин: $A(1, -2), B(0, -4), C(-5, 2)$.

Решение. Высота *CH* опущена на прямую, содержащую сторону *AB*. Общее уравнение прямой *AB* найдем, воспользовавшись формулой (11.4):

$AB: \dfrac{x-1}{0-1} = \dfrac{y-(-2)}{-4-(-2)} \Rightarrow \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+2}{-2}$ или $2x - y - 4 = 0$.

Тогда $d = \dfrac{\left|2\cdot(-5)-2-4\right|}{\sqrt{2^2+(1)^2}} = \dfrac{16}{\sqrt{5}}$ - искомая высота.

Ответ: $\dfrac{16}{\sqrt{5}}$.