Интегралы и дифференциальные уравнения

Модуль 2. Определенный интеграл, несобственные интегралы

Лекция 2.3

Часть 2

Аннотация

Вычисление площади плоской фигуры.

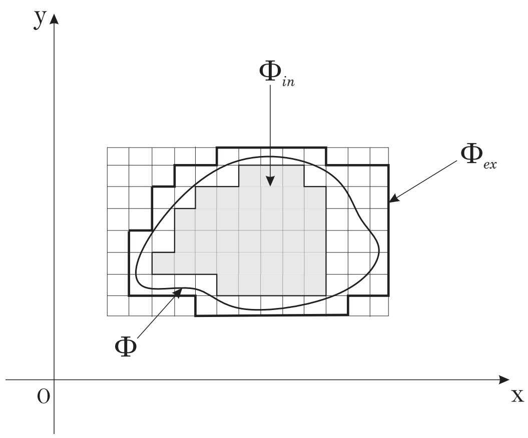

Рис. 1

Представим, что в воду попала капля масла и образовала на поверхности пятно неправильной формы. Может оказаться так, что нам понадобится вычислить площадь этого пятна. Каким образом это можно сделать? С математической точки зрения пятно представляет собой плоскую фигуру, то есть часть плоскости, ограниченную замкнутой кривой. Обозначим эту фигуру буквой Φ. Введем прямоугольную декартову систему координат; построим прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат, целиком содержащий внутри себя фигуру Φ; разобьем этот прямоугольник на квадраты с помощью прямых, параллельных его сторонам (см. рис. 1); обозначим через Δ диагональ наибольшего из этих квадратов. Из тех квадратов, которые лежат целиком внутри Φ, составим новую фигуру и назовем ее Φ_{in} (*in* – это сокращение слова *interior*, то есть "*внутренний*"); обозначим через $S(\Phi_{in})$ площадь этой фигуры. Из квадратов, имеющих хотя бы одну общую точку с Φ, составим фигуру Φ_{ex} (*ex* подразумевает *exterior*, то есть "*внешний*"); обозначим через $S(\Phi_{ex})$ ее площадь.

Определение (квадрируемая плоская фигура)

Плоская фигура Φ называется квадрируемой, если площади $S(\Phi_{in})$ и $S(\Phi_{ex})$ стремятся к одному и тому же пределу при стремлении диагонали разбивающих фигуру Φ квадратов к нулю. Этот предел называют площадью фигуры Φ и обозначают $S(\Phi)$:

$$\lim_{\Delta\to 0} S(\Phi_{in}) = \lim_{\Delta\to 0} S(\Phi_{ex}) = S(\Phi)$$

Заметим, что вместо фигур, составленных из квадратов, можно использовать многоугольники или любые другие фигуры, о которых уже известно, что они квадрируемы.

Полезно иметь какой-нибудь *признак* квадрируемости фигур, который облегчал бы проверку фигур на квадрируемость. Оказывается, такой признак действительно существует.

Теорема

Если граница плоской фигуры представляет собой спрямляемую кривую, то эта фигура квадрируема.

Для того, чтобы выяснить, каким образом площади плоских фигур можно вычислять с помощью определенных интегралов, введем понятие *криволинейной трапеции*.

Определение (криволинейная трапеция)

Криволинейной трапецией называют фигуру, ограниченную графиком непрерывной и неотрицательной на отрезке $[a; b]$ функции $f(x)$, ординатами, проведенными в точках a и b, и отрезком оси Ox между точками a и b (см. рис. 2).

Теорема

Любая криволинейная трапеция квадрируема, а ее площадь может быть вычислена по формуле:

$$S = \int\limits_a^b f(x)dx \tag{2.4.1}$$

□

1. Разобьем отрезок $[a; b]$ на части, вставив между числами a и b числа $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Обозначим символом $\underline{f}_i$ наименьшее, а символом $\overline{f}_i$ наибольшее значения функции f на i-ом сегменте $[x_i; x_{i+1}]$ и составим нижнюю интегральную сумму

$$S(\Phi_{in}) = \sum_{i=0}^{n-1} \underline{f}_i \Delta x_i \tag{2.4.2}$$

и верхнюю интегральную сумму

$$S(\Phi_{ex}) = \sum_{i=0}^{n-1} \overline{f}_i \Delta x_i \tag{2.4.3}$$

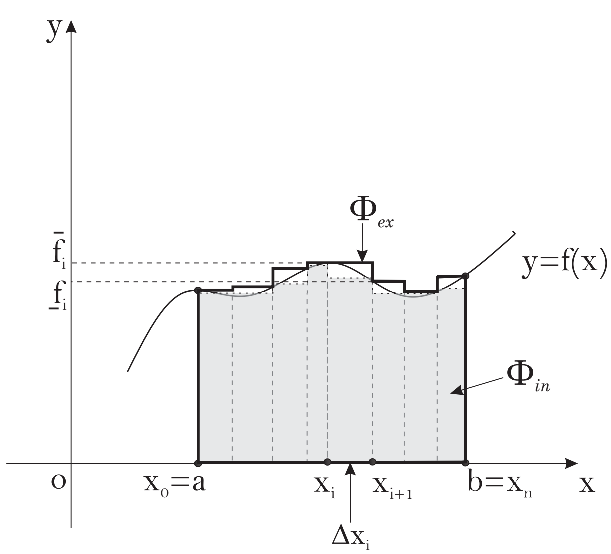

Рис. 2

В формулах (2.4.2) и (2.4.3) величина Δx_i – это длина i-го сегмента $[x_i; x_{i+1}]$: $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. Число $S(\Phi_{in})$ – не что иное как площадь ступенчатой фигуры Φ_{in}, вписанной в криволинейную трапецию (на рис. 2 заштрихована серым цветом); число $S(\Phi_{ex})$ равно площади фигуры Φ_{ex}, описанной около криволинейной трапеции (на рис. 2 выделена жирной линией).

2. Согласно определению криволинейной трапеции функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$; следовательно, она интегрируема на этом отрезке. Так как функция f интегрируема на отрезке $[a;b]$, верхняя и нижняя интегральные суммы стремятся к одному и тому же числу (назовем это число S) при стремлении наибольшей из разностей Δx_i к нулю; это число по равно определенному интегралу функции f по отрезку $[a;b]$. С другой стороны, согласно определению квадрируемой плоской фигуры, если площади (2.4.2) и (2.4.3) стремятся к одному и тому же числу S при стремлении диаметра разбиения (то есть наибольшего из чисел Δx_i) к нулю, то это число S и является площадью рассматриваемой фигуры.

Следовательно, площадь криволинейной трапеции равна определенному интегралу: $S = \int\limits_a^b f(x)dx$

■

Примеры

Найдем площадь под графиком функции $y = \frac{2}{x}$ на отрезке $[1;4]$ (заштрихованная область на рис. 3). Для этого воспользуемся формулой (2.4.1). В нашем случае $f(x) = \frac{2}{x}$, $a = 1$, $b = 4$:

$$S = \int\limits_1^4 \frac{2}{x}dx = 2\ln|x|\Big|_1^4 = 2\ln 4 - 2\ln 1 = 2\ln 4 \approx 2,77$$

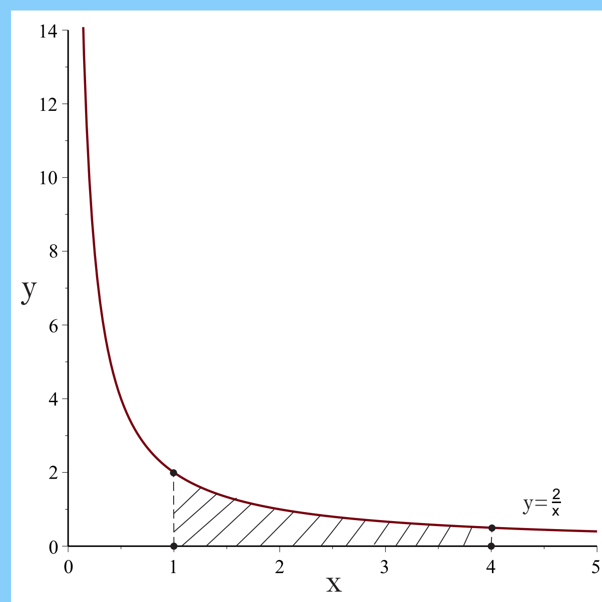

Рис. 3

Следствия из теоремы.

1. В тех случаях, когда функция $f(x)$ меняет знак на отрезке $[a;b]$, для вычисления площади под графиком этой функции необходимо интегрировать ее модуль:

$$S = \int\limits_a^b |f(x)|dx \tag{2.4.4}$$

Примеры

Найдем площадь фигуры, ограниченной графиком функции $\sin(x)$, прямыми $x = -\frac{5\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{4}$ и осью x (рис. 4). Воспользуемся формулой (2.4.4):

$$S = \int\limits_{-\frac{5\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} |\sin(x)|dx = \left| \begin{array}{c} \sin(x) \geqslant 0 \text{ при } x \in \left[-\frac{5\pi}{4}; -\pi\right] \cup \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \\ \Downarrow \\ |\sin(x)| = \sin(x) \text{ при } x \in \left[-\frac{5\pi}{4}; -\pi\right] \cup \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \\ ----------------------- \\ \sin(x) \leqslant 0 \text{ при } x \in [-\pi; 0] \\ \Downarrow \\ |\sin(x)| = -\sin(x) \text{ при } x \in [-\pi; 0] \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_{-\frac{5\pi}{4}}^{-\pi} \sin(x)dx - \int\limits_{-\pi}^{0} \sin(x)dx + \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)dx = \Big(-\cos(x)\Big)\Big|_{-\frac{5\pi}{4}}^{-\pi} - \Big(-\cos(x)\Big)\Big|_{-\pi}^{0} + \Big(-\cos(x)\Big)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) - (-1 - 1) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - (-1)\right) = 4 - \sqrt{2}$$

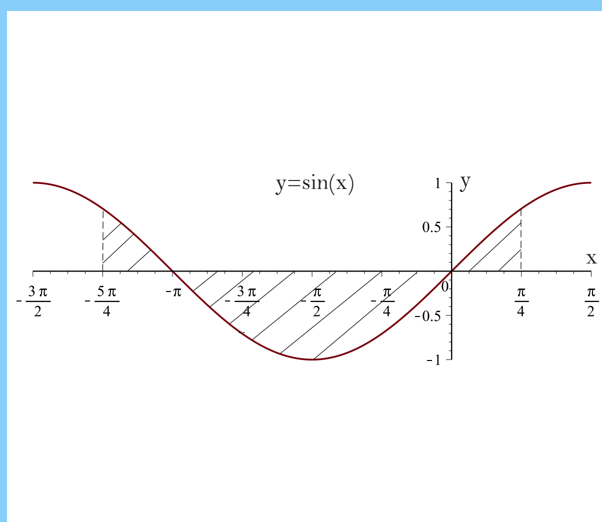

Рис. 4

2. Формула $S = \int\limits_a^b f(x)dx$ может быть использована и в том случае, когда кривая, ограничивающая криволинейную трапецию, задана параметрически с помощью уравнений $x = x(t)$, $y = y(t)$. Пусть $a = x(t_1)$, $b = x(t_2)$, $y(t) \geqslant 0$ при $t \in [t_1; t_2]$; так как $dx = x'(t)dt$, $f(x(t)) = y(t)$, то

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'(t)dt \tag{2.4.5}$$

! При вычислении площади фигуры, ограниченной замкнутой кривой изменение параметра t от t_1 до t_2 должно соответствовать движению вдоль кривой ПО часовой стрелке.

Примеры

Найдем площадь эллипса (рис. 5). Эллипс, центр которого находится в начале координат, задается параметрическими уравнениями

$$x(t) = a\cos(t), \quad y(t) = b\sin(t)$$

где a – большая полуось, b – малая полуось. Параметр t при движении вдоль эллипса по часовой стрелке изменяется от 2π до 0. Используя формулу (2.4.5), получаем:

$$S = \int\limits_{2\pi}^{0} b\sin(t)\cdot(-a\sin(t))dt = -ab\int\limits_{2\pi}^{0} \sin^2(t)dt = ab\int\limits_{0}^{2\pi} \sin^2(t)dt =$$

$$= ab\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2}\big(1-\cos(2t)\big)dt = \frac{ab}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin(2t)\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \pi ab$$

Мы воспользовались формулой понижения степени: $\sin^2(x) = \frac{1}{2}\big(1-\cos(2x)\big)$.

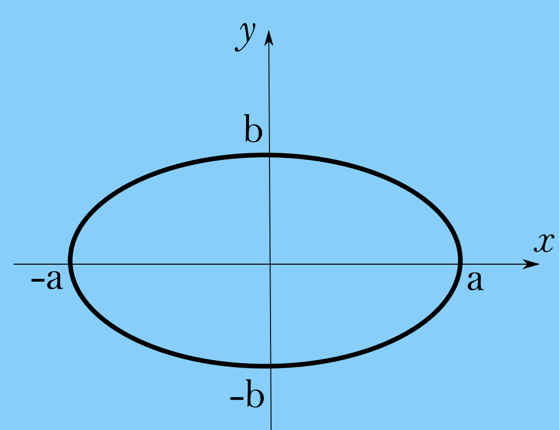

Рис. 5

3. Пусть L – кривая, заданная в полярной системе координат уравнением $r = r(\theta)$, $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$, предположим, что функция $r(\theta)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[\alpha;\beta]$. Плоскую фигуру, ограниченную кривой L и двумя лучами, составляющими с полярной осью углы α и β, называют *криволинейным сектором* (фигура OAB на рис. 6). Криволинейный сектор представляет собой квадрируемую фигуру, площадь которой может быть вычислена с помощью определенного интеграла:

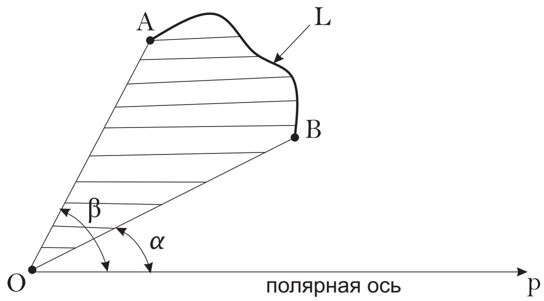

Рис. 6

$$S_{OAB} = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta)d\theta \qquad (2.4.6)$$

Примеры

Найдем площадь трилистника (рис. 7). В полярных координатах трилистник задается уравнением $r(\theta) = a\cos(3\theta)$, где a – число, задающее размер трилистника. Из свойств симметрии трилистника следует, что его площадь равна увеличенной в 6 раз площади заштрихованной части, которая соответствует изменению угла θ от 0 до $\frac{\pi}{6}$. Используя формулу (2.4.6), получаем:

$$S = 6\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} a^2\cos^2(3\theta)d\theta = \frac{3a^2}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\big(1+\cos(6\theta)\big)d\theta =$$

$$= \frac{3a^2}{2}\left(\theta + \frac{1}{6}\sin(6\theta)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi a^2}{4}$$

Мы воспользовались формулой понижения степени: $\cos^2(x) = \frac{1}{2}\big(1+\cos(2x)\big)$.

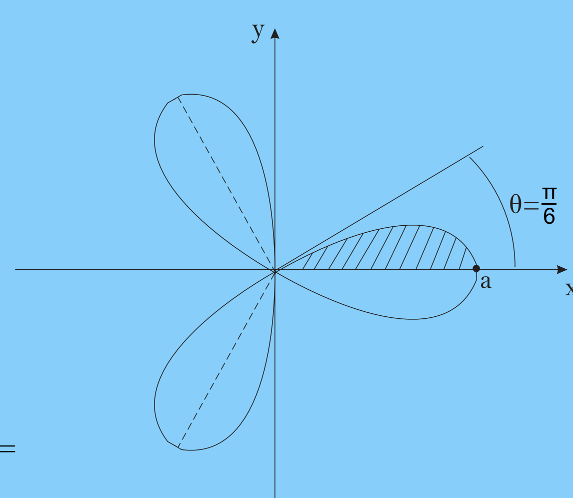

Рис. 7: Трилистник $r(\theta) = a\cos(3\theta)$

4. Площадь области, заключенной между графиками функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ (фигура $ABCD$ на рис. 8) может быть вычислена по формуле:

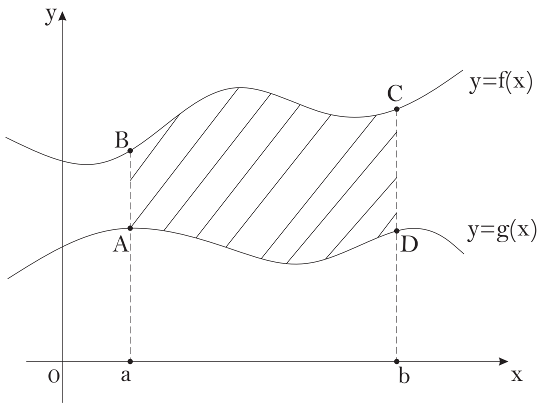

Рис. 8

$$S_{ABCD} = \int\limits_a^b |f(x) - g(x)|dx \tag{2.4.7}$$

Примеры

Найдем площадь области, ограниченной графиками функций $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$ (заштрихованная область на рис. 9). Сначала найдем точки пересечения графиков; для этого составим уравнение: $\sqrt{x} = x^2$; возведем правую и левую части в квадрат: $x = x^4$; это уравнение имеет такие решения: $x = 0$ и $x = 1$; подставим эти решения либо в $y = \sqrt{x}$, либо в $y = x^2$; найдем координаты точек пересечения: $(0; 0)$, $(1; 1)$ (черные точки на рис. 9). Используя формулу (2.4.7), получаем:

$$S = \int\limits_0^1 |x^2 - \sqrt{x}|dx =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \sqrt{x} \geqslant x^2 \text{ при } x \in [0; 1] \\ \Downarrow \\ |x^2 - \sqrt{x}| = \sqrt{x} - x^2 \text{ при } x \in [0; 1] \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3 \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}$$

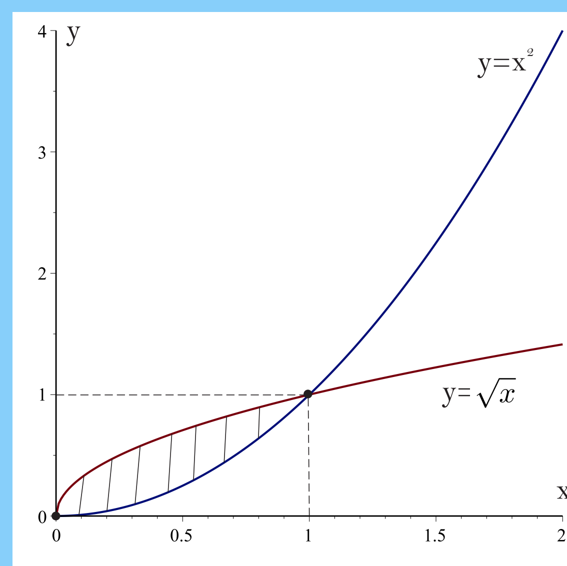

Рис. 9

5. Площадь области, заключенной между графиками функций $x = \psi(y)$ и $x = \varphi(y)$ (фигура $ABCD$ на рис. 10) может быть вычислена по формуле:

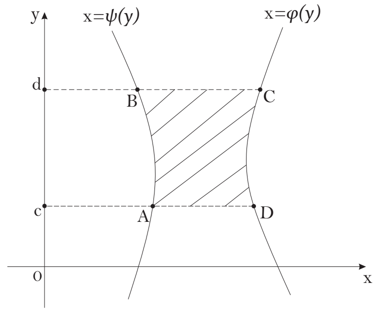

Рис. 10

$$S_{ABCD} = \int_c^d |\varphi(y) - \psi(y)|dy \qquad (2.4.8)$$

Примеры

Найдем площадь области, ограниченной графиками функций $y^2 = 2x + 1$ и $x - y - 1 = 0$ (заштрихованная область на рис. 11). Сначала найдем точки пересечения графиков; для этого перепишем формулы, задающие функции, в виде зависимости x от y:

$$y^2 = 2x + 1 \Longrightarrow x(y) = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$$

$$x - y - 1 = 0 \Longrightarrow x(y) = y + 1$$

Теперь мы можем составить уравнение:

$$\frac{1}{2}(y^2 - 1) = y + 1$$

решая его, получим: $y = -1$ и $y = 3$. Подставим эти решения либо в $x(y) = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$, либо в $x(y) = y + 1$ и найдем координаты точек пересечения: $(0; -1)$, $(4; 3)$ (черные точки на рис. 11). Используя формулу (2.4.8), получаем:

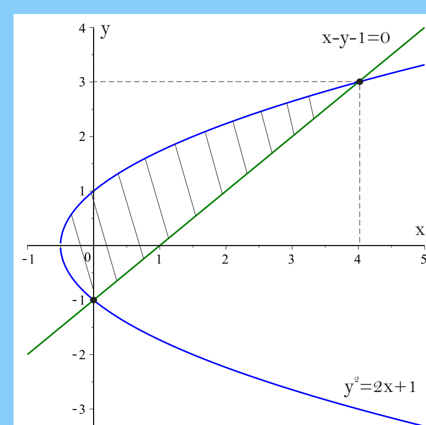

Рис. 11

$$S = \int_{-1}^{3} |y + 1 - \frac{1}{2}(y^2 - 1)|dy = \left| \begin{array}{c} y + 1 \geqslant \frac{1}{2}(y^2 - 1) \text{ при } y \in [-1; 3] \\ \Downarrow \\ |y + 1 - \frac{1}{2}(y^2 - 1)| = y + 1 - \frac{1}{2}(y^2 - 1) \text{ при } y \in [-1; 3] \end{array} \right| =$$

$$= \int_{-1}^{3} \left(y + 1 - \frac{1}{2}(y^2 - 1) \right) dy = \left(\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{6}y^3 + \frac{3}{2}y \right) \Bigg|_{-1}^{3} = \frac{16}{3}$$