Интегралы и дифференциальные уравнения

Модуль 2. Определенный интеграл, несобственные интегралы

Лекция 2.3

Часть 1

Аннотация

Вычисление длины дуги кривой.

Рассмотрим движение тела, брошенного под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0. С хорошей точностью можно считать, что оно движется в одной плоскости по параболе (пунктирная линия на рис. 1).

Если ввести прямоугольную декартову систему координат и в качестве начала отсчета выбрать точку броска, то зависимость координат тела от времени будет описываться формулами:

$$x = \overbrace{v_0 \cos(\alpha) t}^{\varphi(t)}, \qquad y = \overbrace{v_0 \sin(\alpha) t - \frac{gt^2}{2}}^{\psi(t)} \tag{2.3.1}$$

Формулы (2.3.1) задают параболу в параметрической форме. Произвольная кривая на плоскости определяется следующим образом:

Определение (плоская кривая)

Пусть φ, ψ – непрерывные на отрезке $[a; b]$ функции. Плоской кривой называется множество точек плоскости, координаты которых задаются уравнениями:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \qquad t \in [a; b] \tag{2.3.2}$$

Аргумент функций φ и ψ принято называть *параметром кривой*, а про саму кривую говорят, что она задана *параметрически.*

Кривая в пространстве определяется аналогично; разница состоит в том, что к уравнениям (2.3.2) добавляется еще одно: $z = \chi(t)$, где χ – непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция.

Вернемся к телу, брошенному под углом к горизонту. Предположим, что нам нужно вычислить пройденный этим телом путь, то есть длину его траектории. Пусть $t = a$ – момент броска тела, $t = b$ – момент падения тела на землю, так что движение тела происходит на отрезке времени $[a; b]$. Разобьем отрезок $[a; b]$ точками $t_1, \ldots, t_{n-1}$, где n – какое-то натуральное число, большее 1; каждому из моментов времени $t_0, \ldots, t_n$ (мы будем считать, что $t_0 = a$, $t_n = b$) соответствует своя точка траектории с координатами $(\varphi(t_i), \psi(t_i))$, $i = 0, \ldots, n$. Соединяя эти точки, получим

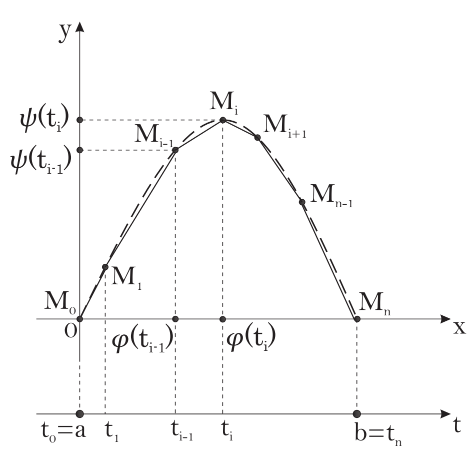

Рис. 1

ломаную линию $M_0 \dots M_n$, вписанную в рассматриваемую кривую (см. рис. 1). Расстояние между точками M_{i-1} и M_i определяется по формуле:

$$|M_{i-1}M_i| = \sqrt{(\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}))^2 + (\psi(t_i) - \psi(t_{i-1}))^2}$$

Длина всей ломаной равна сумме длин отрезков, из которых она состоит:

$$L\big(\{t_i\}\big) = \sum_{i=0}^{n} |M_{i-1}M_i|$$

Символ $\{t_i\}$ указывает на то, что длина ломаной зависит от выбора точек $t_0, \dots, t_n$.

Определение (спрямляемая кривая)

Кривая называется *спрямляемой*, если существует предел, к которому стремится длина вписанной ломаной, когда длина ее наибольшего звена стремится к нулю. Этот предел называется *длиной* данной кривой.

$$l = \lim_{\Delta \to 0} L\big(\{t_i\}\big), \quad \Delta = \max_i |M_{i-1}M_i|$$

Теорема

1. **Для кривых на плоскости.** Если функции φ и ψ имеют на отрезке $[a;b]$ непрерывные производные, то кривая, задаваемая уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \qquad t \in [a;b]$$

спрямляема, а ее длина может быть вычислена по формуле:

$$l = \int\limits_a^b \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt \tag{2.3.3}$$

2. **Для кривых в пространстве.** Если функции φ, ψ и χ имеют на отрезке $[a;b]$ непрерывные производные, то кривая, задаваемая уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \qquad t \in [a;b]$$

спрямляема, а ее длина может быть вычислена по формуле:

$$l = \int\limits_a^b \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)}dt \tag{2.3.4}$$

Следствия из теоремы.

1. Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[a;b]$. Если плоская кривая является графиком функции $f(x)$, то она спрямляема, а ее длина может быть вычислена по формуле

$$\boxed{l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx} \tag{2.3.5}$$

2. Предположим, что плоская кривая задана в полярных координатах (r, θ). Пусть функция $r(\theta)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[\theta_1; \theta_2]$. Если кривая является графиком функции $r(\theta)$, то она спрямляема, а ее длина может быть вычислена по формуле

$$\boxed{l = \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}d\theta} \tag{2.3.6}$$

3. Снова предположим, что плоская кривая задана в полярных координатах (r, θ). Пусть функция $\theta(r)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[r_1; r_2]$. Если кривая является графиком функции $\theta(r)$, то она спрямляема, а ее длина может быть вычислена по формуле

$$\boxed{l = \int\limits_{r_1}^{r_2} \sqrt{1 + r^2\theta'^2(r)}dr} \tag{2.3.7}$$

Примеры

1. Циклоида – плоская кривая, которую описывает точка окружности радиуса R, катящейся без проскальзывания по прямой линии. Циклоида описывается уравнениями:

$$x(t) = R(t - \sin(t)), \quad y(t) = R(1 - \cos(t))$$

Вычислим длину первой арки циклоиды ($t \in [0; 2\pi]$). Вычислим производные:
$\varphi'(t) = R(1 - \cos(t))$, $\psi'(t) = R\sin(t)$; воспользуемся формулой (2.3.3):

$$l = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{R^2(1 - \cos(t))^2 + R^2\sin^2(t)}dt = \int\limits_0^{2\pi} R\sqrt{2 - 2\cos(t)}dt = R\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}dt =$$

$$= 2R\int\limits_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right)dt = \left(-4R\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 8R$$

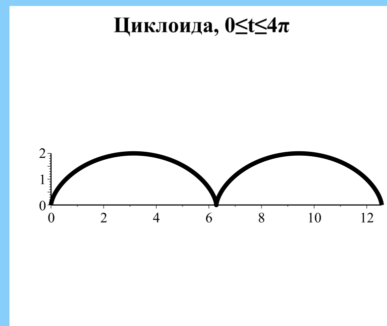

Рис. 2

2. Вычислим длину параболы на отрезке $[0;2]$. В данном случае $f'(x)=2x$; используя формулу (2.3.5), получаем:

$$l=\int\limits_0^2\sqrt{1+4x^2}dx=\int\limits_0^2\sqrt{1+4x^2}\cdot 1dx=\left|\begin{array}{c}\text{интегрируем}\\ \text{по частям}\end{array}\right|=x\sqrt{1+4x^2}\Big|_0^2-\int\limits_0^2\frac{4x^2}{\sqrt{1+4x^2}}dx=$$

$$=2\sqrt{17}-\int\limits_0^2\frac{4x^2+1-1}{\sqrt{1+4x^2}}dx=2\sqrt{17}-\int\limits_0^2\sqrt{1+4x^2}dx+\int\limits_0^2\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}dx=$$

$$=2\sqrt{17}+\tfrac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+\tfrac{1}{4}}\right|\Bigg|_0^2-\int\limits_0^2\sqrt{1+4x^2}dx=2\sqrt{17}+\tfrac{1}{2}\ln(4+\sqrt{17})-\int\limits_0^2\sqrt{1+4x^2}dx$$

Перенесем оставшийся интеграл из правой части в левую:

$$2\int\limits_0^2\sqrt{1+4x^2}dx=2\sqrt{17}+\frac{1}{2}\ln(4+\sqrt{17})\Longrightarrow\int\limits_0^2\sqrt{1+4x^2}dx=\sqrt{17}+\frac{1}{4}\ln(4+\sqrt{17})$$

Ответ:

$$l=\sqrt{17}+\frac{1}{4}\ln(4+\sqrt{17})$$

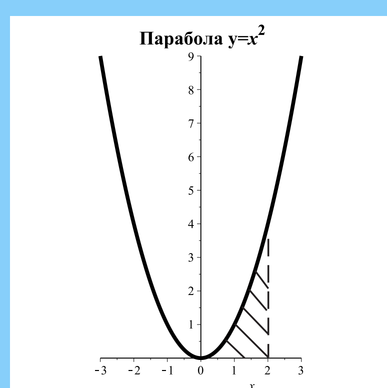

Рис. 3

3. Вычислим длину кардиоиды $r(\theta) = a(1+\cos(\theta))$. Найдем производную: $r'(\theta) = -a\sin(\theta)$; воспользуемся формулой (2.3.6):

$$l = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1+\cos(\theta))^2 + a^2\sin^2(\theta)}d\theta = a\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1+2\cos(\theta)+\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)}d\theta =$$

$$= a\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{2+2\cos(\theta)}d\theta = \left| \begin{array}{c} \text{используем формулу понижения степени:} \\ \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}(1+\cos(\theta)) \Rightarrow 1+\cos(\theta) = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{array} \right| =$$

$$= a\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{4\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}d\theta = 2a\int\limits_0^{2\pi} \left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| d\theta =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \theta \in [0;\pi] \Rightarrow \frac{\theta}{2} \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right], \quad \theta \in [\pi;2\pi] \Rightarrow \frac{\theta}{2} \in \left[\frac{\pi}{2};\pi\right] \\ \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \geqslant 0 \text{ при } \theta \in [0;\pi] \Rightarrow \left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{ при } \theta \in [0;\pi] \\ \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \leqslant 0 \text{ при } \theta \in [\pi;2\pi] \Rightarrow \left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| = -\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{ при } \theta \in [\pi;2\pi] \end{array} \right| =$$

$$= 2a\int\limits_0^{\pi} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta - 2a\int\limits_{\pi}^{2\pi} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta = 2a\cdot 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi} - 2a\cdot 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\Bigg|_{\pi}^{2\pi} = 8a$$

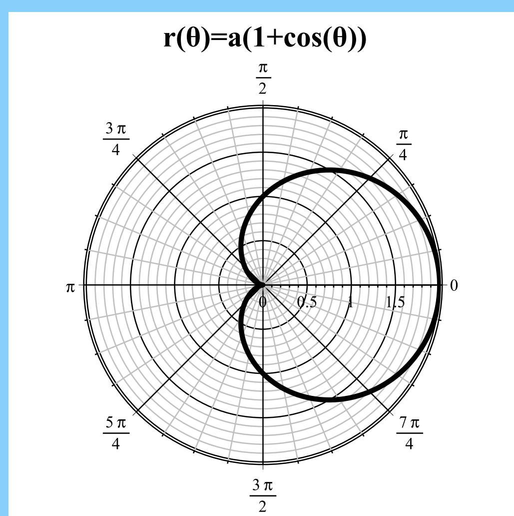

Рис. 4

4. Вычислим длину дуги кривой $\theta(r) = \frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)$ от $r=1$ до $r=3$. Найдем производную:

$\theta'(r) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{r^2}\right)$; воспользуемся формулой (2.3.7):

$$l = \int\limits_1^3 \sqrt{1 + r^2 \cdot \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{r^2}\right)^2}dr = \int\limits_1^3 \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(r^2 - 2 + \frac{1}{r^2}\right)}dr = \int\limits_1^3 \sqrt{\frac{1}{4} \cdot r^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{r^2}}dr =$$

$$= \left|\left(r + \frac{1}{r}\right)^2 = r^2 + 2 + \frac{1}{r^2}\right| = \frac{1}{2}\int\limits_1^3 \sqrt{\left(r + \frac{1}{r}\right)^2}dr = \frac{1}{2}\int\limits_1^3 \left(r + \frac{1}{r}\right)dr = \frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{2} + \ln(r)\right)\Bigg|_1^3 =$$

$$= 2 + \ln\sqrt{3}$$

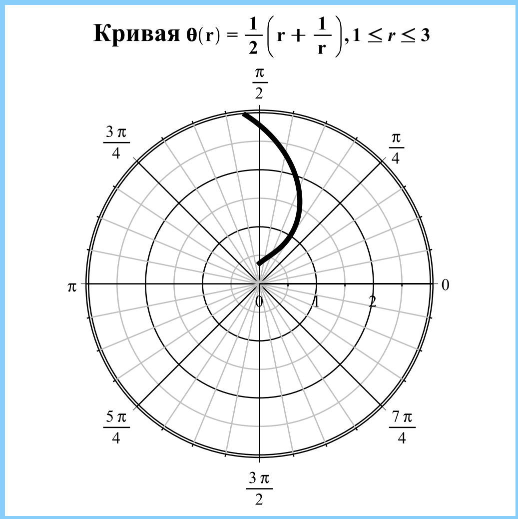

Рис. 5