Аналитическая геометрия

Модуль 2. Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве

Лекция 6

Аннотация

Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданному вектору. Общее уравнение плоскости. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки, не лежащие на одной прямой. Уравнение плоскости "в отрезках". Взаимное расположение двух плоскостей. Угол между двумя плоскостями. Расстояние от точки до плоскости. Расположение заданной точки относительно сторон плоскости.

§12. Плоскость в пространстве

Простейшей поверхностью является плоскость. Плоскость в пространстве $Oxyz$ можно задать разными способами. Каждому из них соответствует определенный вид ее уравнения.

12.1. Уравнение плоскости, проходящей через точку перпендикулярно заданному вектору

Рассмотрим в пространстве некоторую плоскость π. Пусть точка $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \pi$, а ненулевой вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ перпендикулярен этой плоскости (рис.12.1).

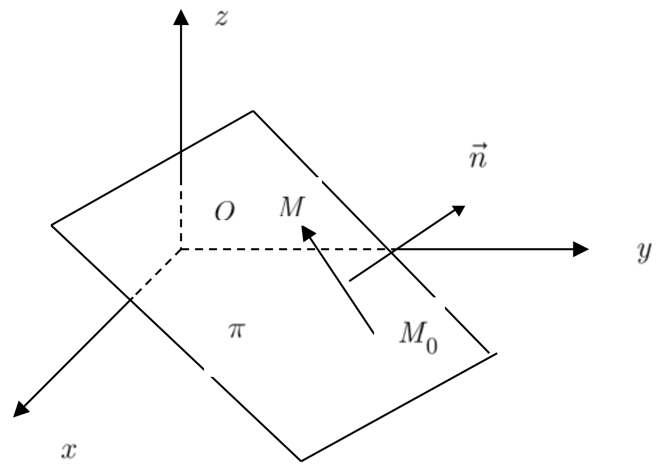

Рис. 12.1.

При таких условиях произвольная точка $M(x,y,z)\in\pi$ тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z_0-z)$ ортогонален вектору $\vec{n}$, т.е. их скалярное произведение равно нулю:

$\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{n}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)\cdot(A,B,C)=0$. Отсюда

$$\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z_0-z)=0.} \qquad (12.1)$$

Вектор $\vec{n}$ называют **нормальным вектором плоскости π.**

Уравнение (12.1) называют **уравнением плоскости, проходящей через точку перпендикулярно заданному вектору**.

12.2. Общее уравнение плоскости

Если в уравнении (12.1) раскрыть скобки и привести подобные слагаемые, то можно получить уравнение

$$\boxed{Ax+By+Cz+D=0,} \qquad (12.2)$$

называемое **общим уравнением плоскости**. Здесь A, B, $C,D\in\mathbf{R}$ и $A^2+B^2+C^2\neq 0$ (т. е. *A*, *B* и *C* не равны нулю одновременно).

Рассмотрим *частные случаи* общего уравнения плоскости:

Значения коэффициентов	Вид общего уравнения	Графическое расположение
$D=0$	$Ax+By+Cz=0$	Плоскость проходит через начало координат
$A=0$	$By+Cz+D=0$	Плоскость параллельна оси *Ox*
$B=0$	$Ax+Cz+D=0$	Прямая, параллельная оси *Oy*
$C=0$	$Ax+By+D=0$	Плоскость параллельна оси *Oz*
$A=B=0$	$Cz+D=0$	Плоскость параллельна плоскости xOy
$A=C=0$	$By+D=0$	Плоскость параллельна плоскости xOz
$B=C=0$	$Ax+D=0$	Плоскость параллельна плоскости yOz
$A=D=0$	$By+Cz=0$	Плоскость параллельна оси *Ox* и проходит через начало координат
$B=D=0$	$Ax+Cz=0$	Прямая, параллельная оси *Oy* и проходит через начало координат
$C=D=0$	$Ax+By=0$	Плоскость параллельна оси *Oz* и проходит через начало координат
$A=B=D=0$	$z=0$	Уравнение плоскости xOy
$A=C=D=0$	$y=0$	Уравнение плоскости xOz
$B=C=D=0$	$x=0$	Уравнение плоскости yOz

Пример. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(-2;5;1)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}=(1,2,-3)$.

Решение: Воспользуемся уравнением (12.1):

$$1\cdot(x-(-2))+2\cdot(y-5)-3\cdot(z-1)=0.$$

Раскроем скобки и получим общее уравнение плоскости $x+2y-3z-5=0$.

12.3. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки

Три точки пространства, не лежащие на одной прямой, определяют единственную плоскость. Найдем уравнение плоскости π, проходящей через три данные точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ и $M_3(x_3,y_3,z_3)$, не лежащие на одной прямой.

Пусть произвольная точка $M(x,y,z)\in\pi$. Составим векторы:

$\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1,y-y_1,z-z_1)$,

$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$,

$\overrightarrow{M_1M_3}=(x_3-x_1,y_3-y_1,z_3-z_1)$.

Эти векторы лежат на плоскости π тогда и только тогда, когда они компланарны, т.е. их смешанное произведение $\overrightarrow{M_1M}\cdot\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\overrightarrow{M_1M_3}=0$. Запишем это условие в координатной форме:

$$\boxed{\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.} \qquad (12.3)$$

Уравнение (12.3) называют **уравнением плоскости, проходящей через три точки**.

Пример. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1=(2,3,-4)$, $M_2=(1,0,-3)$ и $M_3=(4,-1,3)$.

Решение: Воспользуемся уравнением (12.3):

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-(-4) \\ 1-2 & 0-3 & -3-(-4) \\ 4-2 & -1-3 & 3-(-4) \end{vmatrix}=0 \text{ или } \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z+4 \\ -1 & -3 & 1 \\ 2 & -4 & 7 \end{vmatrix}=0.$$

Раскроем определитель по элементам первой строки:

$$(x-2)\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 7 \end{vmatrix}-(y-3)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}+(z+4)\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}=0,$$

$$(x-2)(-21+4)-(y-3)(-7-2)+(z+4)(4+6)=0,$$

$$(-17)(x-2)+9(y-3)+10(z+4)=0,$$

$17x-9y-10z-47=0$ - общее уравнение плоскости.

12.4. Уравнение плоскости в отрезках

Пусть плоскость отсекает на осях Ox, Oy и Oz соответственно отрезки a, b, и c, т.е. проходит через три точки $M_1(a,0,0)$, $M_2(0,b,0)$ и $M_3(0,0,c)$(рис. 12.2).

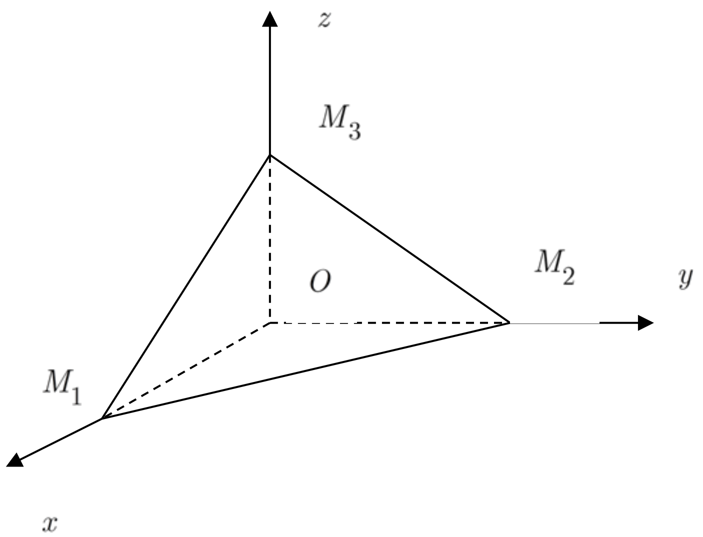

Рис. 12.2.

Подставим координаты этих точек в уравнение (12.3) и раскроим определитель. Получим

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.} \tag{12.4}$$

Уравнение (12.4) называют **уравнением плоскости в отрезках на осях.** Им удобно пользоваться при построении плоскости.

12.5. Взаимное расположение двух плоскостей

Пусть две плоскости π_1 и π_2 заданы своими общими уравнениями:

$\pi_1 : A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $\pi_2 : A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

1. Две плоскости либо совпадают, либо являются параллельными, либо пересекаются по прямой. Тогда

   а) если $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}$, то плоскости совпадают;

б) если $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}\neq\dfrac{D_1}{D_2}$, то плоскости параллельны;

в) если $\dfrac{A_1}{A_2}\neq\dfrac{B_1}{B_2}$ или $\dfrac{B_1}{B_2}\neq\dfrac{C_1}{C_2}$, то плоскости пересекаются по прямой, уравнением которой служит система

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0; \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$$

2. Под **углом между плоскостями** π_1 и π_2 понимается один из двугранных углов, образованный этими плоскостями. Угол между нормальными векторами $\vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$ и $\vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$ этих плоскостей равен одному их таких углов. Поэтому

$$\boxed{\cos(\pi_1\widehat{,}\pi_2)=\cos(\vec{n}_1\widehat{,}\vec{n}_2)=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\,\vec{n}_1\,|\cdot|\,\vec{n}_2\,|}.} \qquad (12.5)$$

Условие параллельности плоскостей:

$$\pi_1\,||\,\pi_2\Leftrightarrow\vec{n}_1\,||\,\vec{n}_2\Leftrightarrow\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

Условие перпендикулярности плоскостей:

$$\pi_1\perp\pi_2\Leftrightarrow\vec{n}_1\perp\vec{n}_2\Leftrightarrow A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2+C_1\cdot C_2=0\,.$$

Пример. Найти угол φ между плоскостями

$\pi_1: 2x+4y-8=0$ и $\pi_2: 2x-y+2z=0$

Решение: Координаты нормальных векторов плоскостей - $\vec{n}_1=(2,4,0)$, $\vec{n}_1=(2,-1,2)$. Воспользуемся формулой (12.5):

$$\cos(\varphi)=\cos(\widehat{\vec{n}_1,\vec{n}_2})=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\,\vec{n}_1\,|\cdot|\,\vec{n}_2\,|}=\frac{2\cdot 2+4\cdot(-1)+0\cdot 2}{\sqrt{2^2+4^2+0^2}\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=0\,.$$

Следовательно, плоскости перпендикулярны.

12.6. Расстояние от точки до плоскости

Пусть плоскость π задана общим уравнением $Ax+By+Cz+D=0$. Расстояние от некоторой точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ до плоскости π можно найти по формуле

$$\boxed{d=\frac{\left|Ax_1+By_1+Cz_1+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+D^2}}.} \tag{12.6}$$

<u>*Пример*</u>. Найти расстояние от точки $M_1(-1,2,6)$ до плоскости

$2x+4y-8=0$.

Решение: Воспользуемся формулой (12.6):

$$d=\frac{\left|Ax_1+By_1+Cz_1+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+D^2}}=\frac{\left|2\cdot(-1)+4\cdot 2+0\cdot 6-8\right|}{\sqrt{2^2+4^2}}=\frac{2}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}.$$