Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Интегралы и дифференциальные уравнения

Раздел "Интегралы". Модуль 2. Определенный интеграл. Несобственные интегралы.

Лекция 2.4

к.ф.-м.н. Чирков Д.М.

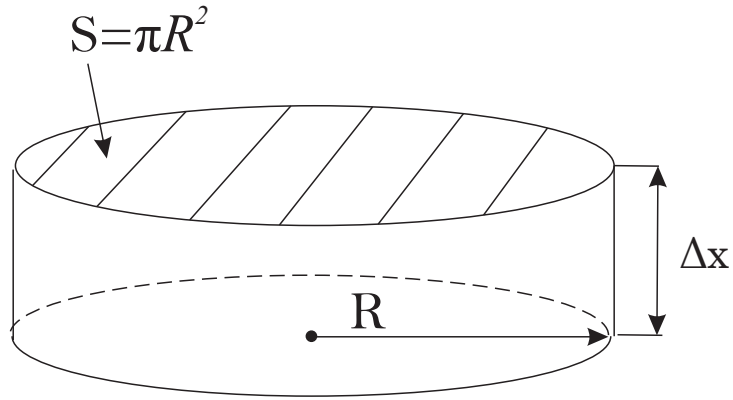
Вычисление объема тела

Определение

Тело – часть пространства, ограниченная замкнутой непересекающейся поверхностью.

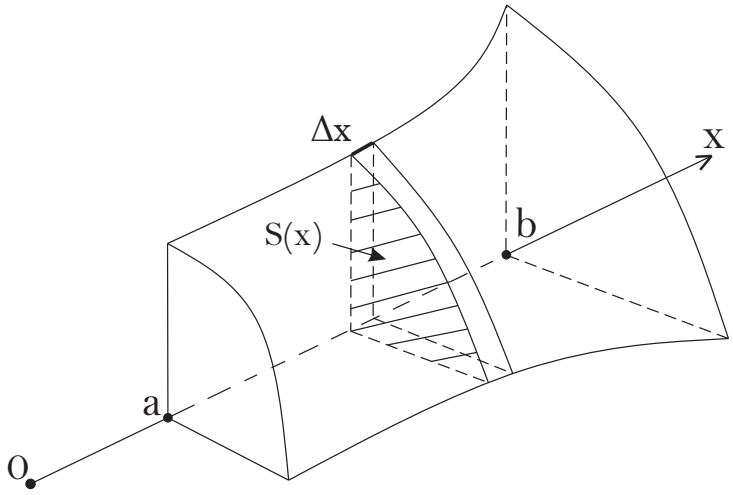
Объем прямого цилиндра равен произведению площади основания на высоту:

$$V = S\Delta x = \pi R^2 \Delta x$$

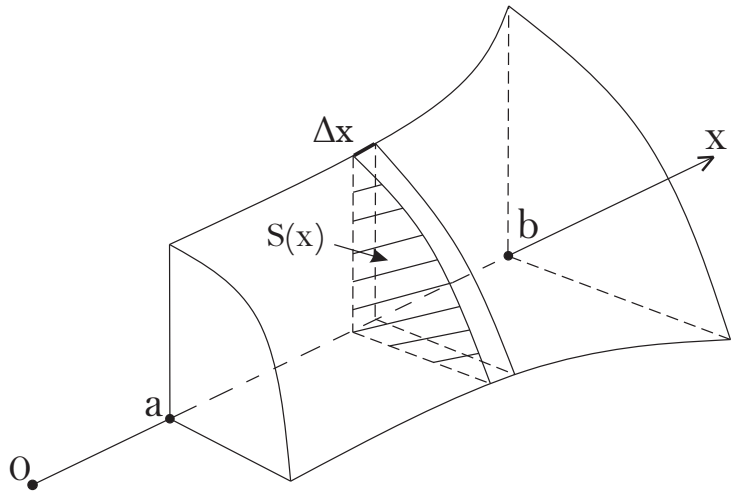


Для того, чтобы вычислить объем произвольного тела, разделим его на тонкие слои с толщиной Δx

Для того, чтобы вычислить объем произвольного тела, разделим его на тонкие слои с толщиной Δx

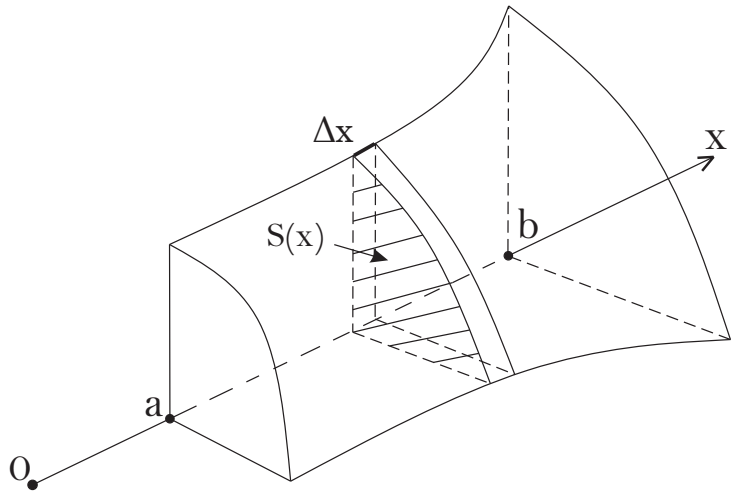


Для того, чтобы вычислить объем произвольного тела, разделим его на тонкие слои с толщиной Δx



Эти слои настолько тонкие, что каждый из них можно с хорошей точностью считать прямым цилиндром.

Для того, чтобы вычислить объем произвольного тела, разделим его на тонкие слои с толщиной Δx



Эти слои настолько тонкие, что каждый из них можно с хорошей точностью считать прямым цилиндром.

Площадь основания такого цилиндра равна $S(x)$, его высота равна $\Delta x \Longrightarrow$ его объем равен $S(x)\Delta x$.

Сумма объемов всех этих цилиндров приближенно равна объему рассматриваемого тела.

Сумма объемов всех этих цилиндров приближенно равна объему рассматриваемого тела. Чем меньше толщина слоев, тем меньше эта сумма отличается от объема тела.

Сумма объемов всех этих цилиндров приближенно равна объему рассматриваемого тела. Чем меньше толщина слоев, тем меньше эта сумма отличается от объема тела.

Когда толщина всех слоев стремится к нулю, мы получаем объем исследуемого тела:

$$V = \int_a^b S(x)dx \tag{1}$$

Пример

Вычислим объем сферы.

Пример

Вычислим объем сферы. В декартовых координатах сфера, центр которой находится в начале координат, задается уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \text{ где } R - \text{ радиус сферы}$$

Пример

Вычислим объем сферы. В декартовых координатах сфера, центр которой находится в начале координат, задается уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \text{ где } R - \text{ радиус сферы}$$

Сечение сферы плоскостью, перпендикулярной оси x – круг, который задается уравнением

$$y^2 + z^2 = R^2 - x^2$$

Пример

Вычислим объем сферы. В декартовых координатах сфера, центр которой находится в начале координат, задается уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \text{ где } R - \text{ радиус сферы}$$

Сечение сферы плоскостью, перпендикулярной оси x – круг, который задается уравнением

$$y^2 + z^2 = R^2 - x^2$$

Радиус такого круга равен $\sqrt{R^2 - x^2} \Longrightarrow$ его площадь равна $\pi(R^2 - x^2)$.

Пример (продолжение)

На сфере радиуса R с центром в начале координат x-координата изменяется от $-R$ до R.

Пример (продолжение)

На сфере радиуса R с центром в начале координат x-координата изменяется от $-R$ до R.

Воспользуемся формулой (1):

$$V = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)dx$$

Пример (продолжение)

На сфере радиуса R с центром в начале координат x-координата изменяется от $-R$ до R.

Воспользуемся формулой (1):

$$V = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)dx = \pi\left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R} =$$

Пример (продолжение)

На сфере радиуса R с центром в начале координат x-координата изменяется от $-R$ до R.

Воспользуемся формулой (1):

$$V = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)dx = \pi\left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R} =$$

$$= \pi\left\{\left(R^2 \cdot R - \frac{R^3}{3}\right) - \left(R^2 \cdot (-R) - \frac{(-R)^3}{3}\right)\right\} =$$

Пример (продолжение)

На сфере радиуса R с центром в начале координат x-координата изменяется от $-R$ до R.

Воспользуемся формулой (1):

$$V = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)dx = \pi\left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R} =$$

$$= \pi\left\{\left(R^2 \cdot R - \frac{R^3}{3}\right) - \left(R^2 \cdot (-R) - \frac{(-R)^3}{3}\right)\right\} =$$

$$= \pi\left\{\frac{2}{3}R^3 - \left(-\frac{2}{3}R^3\right)\right\}$$

Пример (продолжение)

На сфере радиуса R с центром в начале координат x-координата изменяется от $-R$ до R.

Воспользуемся формулой (1):

$$V = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)dx = \pi\left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R} =$$

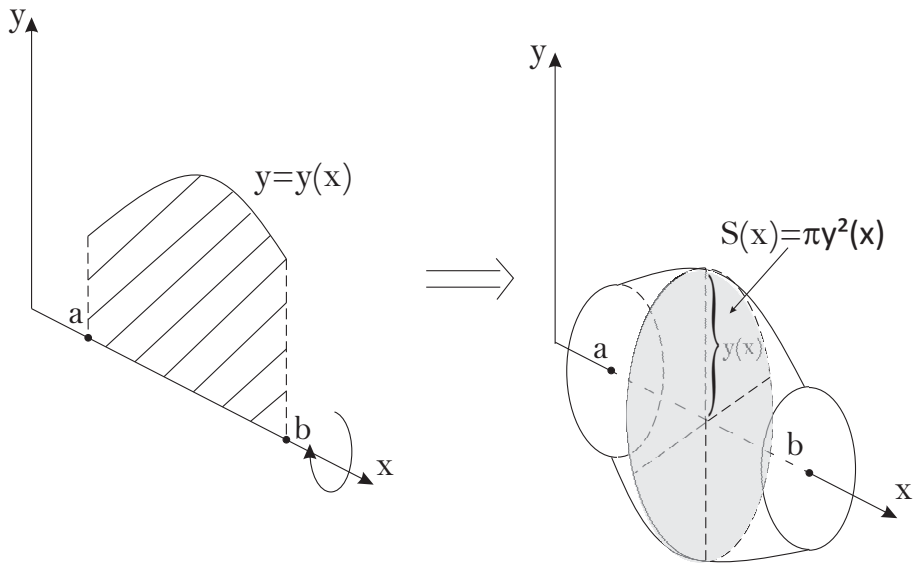
$$= \pi\left\{\left(R^2 \cdot R - \frac{R^3}{3}\right) - \left(R^2 \cdot (-R) - \frac{(-R)^3}{3}\right)\right\} =$$

$$= \pi\left\{\frac{2}{3}R^3 - \left(-\frac{2}{3}R^3\right)\right\} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Определение

Тело вращения – это тело, образованное вращением плоской фигуры вокруг прямой, лежащей в плоскости этой фигуры

На рисунке плоская фигура заштрихована; она вращается вокруг оси x:



Формулы объемов тел, полученных вращением криволинейных трапеций

Формулы объемов тел, полученных вращением криволинейных трапеций

1. если криволинейную трапецию, ограниченную графиком функции $y(x)$ на отрезке $[a;b]$, вращают вокруг **оси Ox**, то объем тела вращения вычисляется по формуле:

$$V = \pi \int_a^b y^2(x)dx \tag{2}$$

Формулы объемов тел, полученных вращением криволинейных трапеций

1. если криволинейную трапецию, ограниченную графиком функции $y(x)$ на отрезке $[a;b]$, вращают вокруг $\boxed{\text{оси } Ox}$, то объем тела вращения вычисляется по формуле:

$$V = \pi \int_a^b y^2(x)dx \tag{2}$$

2. если фигуру, ограниченную графиками функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ вращают вокруг $\boxed{\text{оси } Ox}$, то объем тела вращения вычисляется по формуле:

$$V = \pi \int_a^b |y_1^2(x) - y_2^2(x)|dx \tag{3}$$

Здесь a, b – те значения x, при которых пересекаются графики функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$.

Формулы объемов тел, полученных вращением криволинейных трапеций

3. если криволинейную трапецию, ограниченную графиком функции $y(x)$ на отрезке $[a;b]$, вращают вокруг $\boxed{\text{оси } Oy}$, то объем тела вращения вычисляется по формуле:

$$V = 2\pi \int_a^b |x \cdot y(x)| dx \tag{4}$$

Формулы объемов тел, полученных вращением криволинейных трапеций

3. если криволинейную трапецию, ограниченную графиком функции $y(x)$ на отрезке $[a;b]$, вращают вокруг $\boxed{\text{оси } Oy}$, то объем тела вращения вычисляется по формуле:

$$V = 2\pi \int_a^b |x \cdot y(x)| dx \tag{4}$$

4. если фигуру, ограниченную графиками функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ вращают вокруг $\boxed{\text{оси } Oy}$, то объем тела вращения вычисляется по формуле:

$$V = 2\pi \int_a^b \left| x \cdot \Big(y_1(x) - y_2(x) \Big) \right| dx \tag{5}$$

Здесь a, b – те значения x, при которых пересекаются графики функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$.

Формулы объемов тел, полученных вращением криволинейных трапеций

5. если фигуру, ограниченную кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t)$ и $y = y(t)$ на отрезке $[t_1; t_2]$, вращают вокруг $\boxed{\text{оси } Ox}$, то объем тела вращения вычисляется по формуле:

$$V = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2(t)|x'(t)|dt \tag{6}$$

Формулы объемов тел, полученных вращением криволинейных трапеций

5. если фигуру, ограниченную кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t)$ и $y = y(t)$ на отрезке $[t_1; t_2]$, вращают вокруг $\boxed{\text{оси } Ox}$, то объем тела вращения вычисляется по формуле:

$$V = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2(t)|x'(t)|dt \tag{6}$$

6. если фигуру, ограниченную кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t)$ и $y = y(t)$ на отрезке $[t_1; t_2]$, вращают вокруг $\boxed{\text{оси } Oy}$, то объем тела вращения вычисляется по формуле:

$$V = \pi \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)|y'(t)|dt \tag{7}$$

Формулы объемов тел, полученных вращением криволинейных трапеций

7. если фигуру, ограниченную кривой, заданной в полярных координатах уравнением $r = r(\theta)$ на отрезке $[\theta_1; \theta_2]$, вращают вокруг полярной оси, то объем тела вращения вычисляется по формуле:

$$V = \frac{2}{3}\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^3(\theta)|\sin(\theta)|d\theta \tag{8}$$

Пример

Найти объем тела, образованного вращением вокруг $\boxed{\text{оси } Ox}$ арки циклоиды $\begin{cases} x(t) = a(t - \sin t), \\ y(t) = a(1 - \cos t) \end{cases}$, $a > 0$, $t \in [0; 2\pi]$.

Пример

Найти объем тела, образованного вращением вокруг $\boxed{\text{оси } Ox}$ арки циклоиды $\begin{cases} x(t) = a(t - \sin t), \\ y(t) = a(1 - \cos t) \end{cases}$, $a > 0$, $t \in [0; 2\pi]$.

Найдем производную $x'(t)$:

Пример

Найти объем тела, образованного вращением вокруг **оси Ox** арки циклоиды $\begin{cases} x(t) = a(t - \sin t), \\ y(t) = a(1 - \cos t) \end{cases}$, $a > 0$, $t \in [0; 2\pi]$.

Найдем производную $x'(t)$: $x'(t) = a(1 - \cos t)$.

Пример

Найти объем тела, образованного вращением вокруг **оси Ox** арки циклоиды $\begin{cases} x(t) = a(t - \sin t), \\ y(t) = a(1 - \cos t) \end{cases}$, $a > 0$, $t \in [0; 2\pi]$.

Найдем производную $x'(t)$: $x'(t) = a(1 - \cos t)$. Воспользуемся формулой (6):

$$V = \pi \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2 |a(1 - \cos t)| dt =$$

Пример

Найти объем тела, образованного вращением вокруг $\boxed{\text{оси } Ox}$ арки циклоиды $\begin{cases} x(t) = a(t - \sin t), \\ y(t) = a(1 - \cos t) \end{cases}$, $a > 0$, $t \in [0; 2\pi]$.

Найдем производную $x'(t)$: $x'(t) = a(1 - \cos t)$. Воспользуемся формулой (6):

$$V = \pi \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2 |a(1 - \cos t)| dt =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \text{так как } \cos t \leqslant 1 \text{ для любых } t, \text{ то} \\ 1 - \cos t \geqslant 0 \text{ для любых } t \\ \Downarrow \\ \text{знак модуля можно убрать} \end{array} \right| \textcircled{=}$$

Пример (продолжение)

$$\circledast = \pi \int_0^{2\pi} a^3 (1 - \cos t)^3 dt$$

Пример (продолжение)

$$\overset{(=)}{=} \pi \int_0^{2\pi} a^3(1-\cos t)^3 dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t) dt =$$

Пример (продолжение)

$$\textcircled{=}\ \pi \int_0^{2\pi} a^3(1-\cos t)^3 dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t) dt =$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(1 - 3\cos t + \frac{3}{2}\left[1 + \cos 2t\right] - \frac{1}{4}\left[\cos 3t + 3\cos t\right]\right) dt =$$

Пример (продолжение)

$$\textcircled{=} \pi \int_0^{2\pi} a^3(1-\cos t)^3 dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t) dt =$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(1 - 3\cos t + \frac{3}{2}\left[1 + \cos 2t\right] - \frac{1}{4}\left[\cos 3t + 3\cos t\right]\right) dt =$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(\frac{5}{2} - \frac{15}{4}\cos t + \frac{3}{2}\cos 2t - \frac{1}{4}\cos 3t\right) dt =$$

Пример (продолжение)

$$\textcircled{=} \pi \int_0^{2\pi} a^3(1-\cos t)^3 dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t) dt =$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(1 - 3\cos t + \frac{3}{2}\left[1 + \cos 2t\right] - \frac{1}{4}\left[\cos 3t + 3\cos t\right]\right) dt =$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(\frac{5}{2} - \frac{15}{4}\cos t + \frac{3}{2}\cos 2t - \frac{1}{4}\cos 3t\right) dt =$$

$$= \pi a^3 \left(\frac{5}{2}t - \frac{15}{4}\sin t + \frac{3}{4}\sin 2t - \frac{1}{12}\sin 3t\right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

Пример (продолжение)

$$\textcircled{=} \pi \int_0^{2\pi} a^3(1-\cos t)^3 dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t) dt =$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(1 - 3\cos t + \frac{3}{2}\left[1 + \cos 2t\right] - \frac{1}{4}\left[\cos 3t + 3\cos t\right]\right) dt =$$

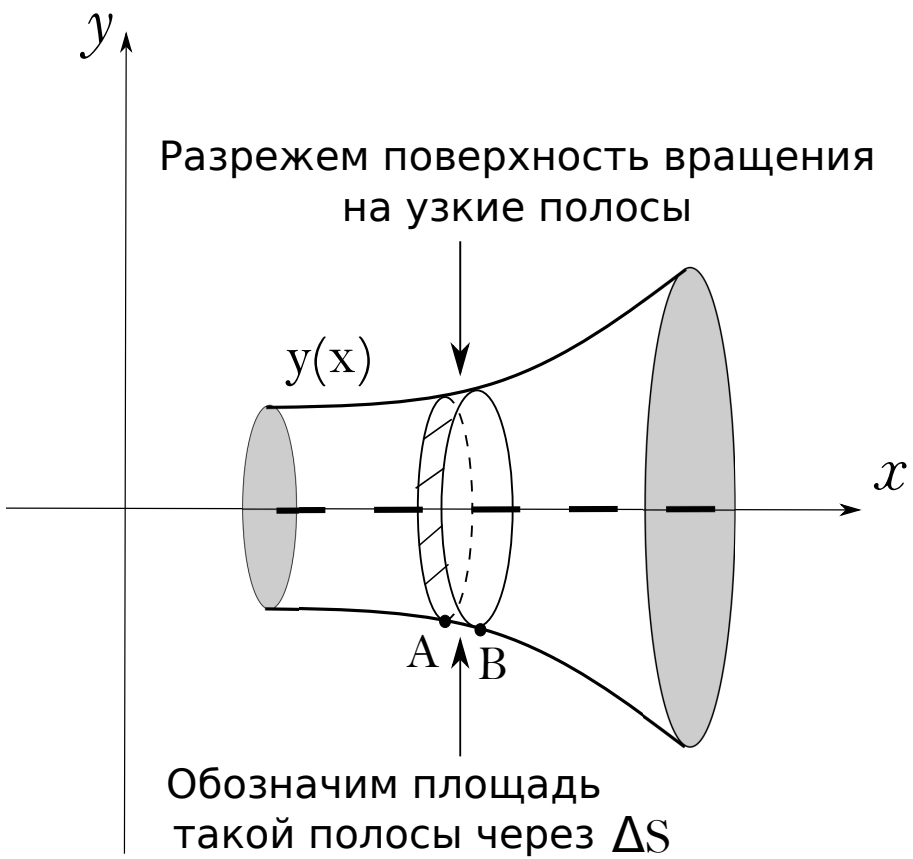
$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(\frac{5}{2} - \frac{15}{4}\cos t + \frac{3}{2}\cos 2t - \frac{1}{4}\cos 3t\right) dt =$$

$$= \pi a^3 \left(\frac{5}{2}t - \frac{15}{4}\sin t + \frac{3}{4}\sin 2t - \frac{1}{12}\sin 3t\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 5\pi^2 a^3$$

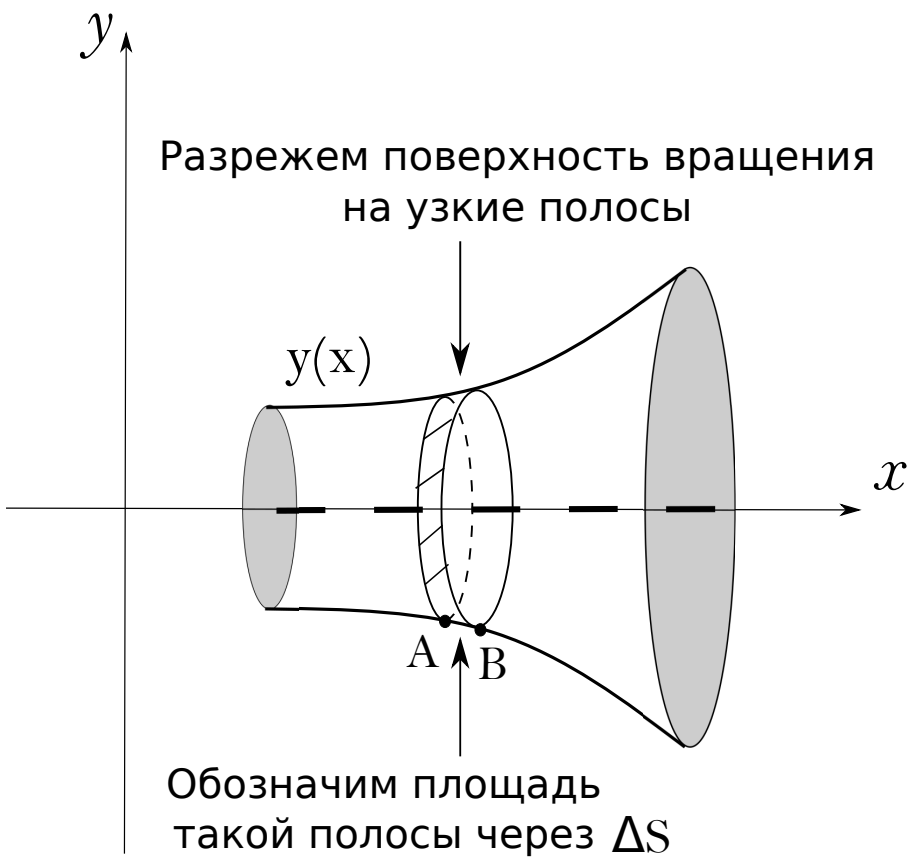
Вычисление площади поверхности вращения

Если график функции $y(x)$ вращать вокруг оси Ox, то образуется поверхность вращения.

Если график функции $y(x)$ вращать вокруг оси Ox, то образуется поверхность вращения.



Если график функции $y(x)$ вращать вокруг оси Ox, то образуется поверхность вращения.



Сумма площадей этих полос приближенно равна площади поверхности вращения.

Если полоса достаточно узкая, ее площадь можно вычислить по формуле площади боковой поверхности цилиндра: $\Delta S = 2\pi \cdot R \cdot AB$, где $R -$ радиус цилиндра, $AB -$ высота цилиндра.

Если полоса достаточно узкая, ее площадь можно вычислить по формуле площади боковой поверхности цилиндра: $\Delta S = 2\pi \cdot R \cdot AB$, где $R -$ радиус цилиндра, $AB -$ высота цилиндра.

В данном случае $R = y(x)$.

Если полоса достаточно узкая, ее площадь можно вычислить по формуле площади боковой поверхности цилиндра: $\Delta S = 2\pi \cdot R \cdot AB$, где $R -$ радиус цилиндра, $AB -$ высота цилиндра.

В данном случае $R = y(x)$. Для того, чтобы найти AB, воспользуемся формулой длины дуги кривой (см. предыдущую лекцию):

$$AB = \sqrt{1 + y'^2(x)} \cdot \Delta x$$

Если полоса достаточно узкая, ее площадь можно вычислить по формуле площади боковой поверхности цилиндра: $\Delta S = 2\pi \cdot R \cdot AB$, где $R -$ радиус цилиндра, $AB -$ высота цилиндра.

В данном случае $R = y(x)$. Для того, чтобы найти AB, воспользуемся формулой длины дуги кривой (см. предыдущую лекцию):

$$AB = \sqrt{1 + y'^2(x)} \cdot \Delta x$$

Тогда $\Delta S = 2\pi y(x)\sqrt{1 + y'^2(x)} \cdot \Delta x$

Если полоса достаточно узкая, ее площадь можно вычислить по формуле площади боковой поверхности цилиндра: $\Delta S = 2\pi \cdot R \cdot AB$, где $R -$ радиус цилиндра, $AB -$ высота цилиндра.

В данном случае $R = y(x)$. Для того, чтобы найти AB, воспользуемся формулой длины дуги кривой (см. предыдущую лекцию):

$$AB = \sqrt{1 + y'^2(x)} \cdot \Delta x$$

Тогда $\Delta S = 2\pi y(x)\sqrt{1 + y'^2(x)} \cdot \Delta x$

Складывая все ΔS, получим приближенное значение площади поверхности вращения.

Если полоса достаточно узкая, ее площадь можно вычислить по формуле площади боковой поверхности цилиндра: $\Delta S = 2\pi \cdot R \cdot AB$, где $R -$ радиус цилиндра, $AB -$ высота цилиндра.

В данном случае $R = y(x)$. Для того, чтобы найти AB, воспользуемся формулой длины дуги кривой (см. предыдущую лекцию):

$$AB = \sqrt{1 + y'^2(x)} \cdot \Delta x$$

Тогда $\Delta S = 2\pi y(x)\sqrt{1 + y'^2(x)} \cdot \Delta x$

Складывая все ΔS, получим приближенное значение площади поверхности вращения.

В пределе, когда ширина всех полос стремится к нулю, мы получаем точное значение площади поверхности вращения.

Теорема 1

Если на отрезке $[a;b]$ функция $y(x)$ имеет непрерывную производную $y'(x)$, то площадь поверхности, образованной вращением графика этой функции вокруг оси абсцисс (ось Ox), может быть вычислена по формуле:

$$S = 2\pi \int_a^b |y(x)| \cdot \sqrt{1 + y'^2(x)} dx \tag{9}$$

Теорема 2

Если на отрезке $[\alpha;\beta]$ функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют непрерывные производные, то площадь поверхности, образованной вращением кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t),\ y = y(t)$, вокруг оси абсцисс (ось Ox), может быть вычислена по формуле

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |y(t)| \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt \qquad (10)$$

Теорема 3

Если на отрезке $[\varphi_1; \varphi_2]$ функция $r(\varphi)$ имеет непрерывную производную, то площадь поверхности, образованной вращением графика этой функции вокруг полярной оси, может быть вычислена по формуле

$$S = 2\pi \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r(\varphi)|\sin\varphi|\sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}d\varphi \qquad (11)$$

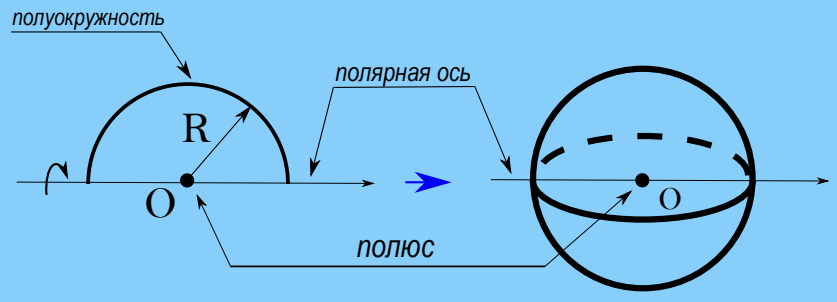
Пример

Найдем площадь поверхности сферы радиуса R.

Пример

Найдем площадь поверхности сферы радиуса R.

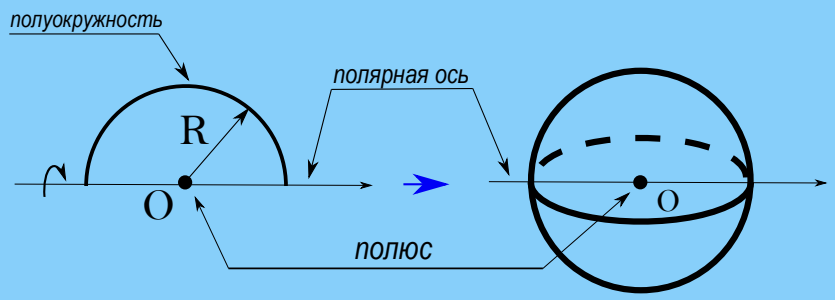
Сферу можно получить, вращая полуокружность вокруг полярной оси:



Пример

Найдем площадь поверхности сферы радиуса R.

Сферу можно получить, вращая полуокружность вокруг полярной оси:



В полярных координатах (r, φ) полуокружность радиуса R задается уравнением $r(\varphi) = R,\ \varphi \in [0; \pi]$.

Пример (продолжение)

Найдем производную $r'(\varphi)$:

Пример (продолжение)

Найдем производную $r'(\varphi)$: $r'(\varphi) = R' = 0$, так как $R -$ постоянная величина (фиксированное число).

Пример (продолжение)

Найдем производную $r'(\varphi)$: $r'(\varphi) = R' = 0$, так как $R -$ постоянная величина (фиксированное число).

Воспользуемся формулой (11):

$$S = 2\pi \int\limits_0^{\pi} R|\sin\varphi|\sqrt{R^2 + 0^2}d\varphi$$

Пример (продолжение)

Найдем производную $r'(\varphi)$: $r'(\varphi) = R' = 0$, так как $R -$ постоянная величина (фиксированное число).

Воспользуемся формулой (11):

$$S = 2\pi \int\limits_0^{\pi} R|\sin\varphi|\sqrt{R^2 + 0^2}d\varphi = 2\pi R^2 \int\limits_0^{\pi} |\sin\varphi|d\varphi =$$

Пример (продолжение)

Найдем производную $r'(\varphi)$: $r'(\varphi) = R' = 0$, так как R – постоянная величина (фиксированное число).

Воспользуемся формулой (11):

$$S = 2\pi \int\limits_0^{\pi} R|\sin\varphi|\sqrt{R^2 + 0^2}d\varphi = 2\pi R^2 \int\limits_0^{\pi} |\sin\varphi|d\varphi =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \text{при } \varphi \in [0;\pi] \ \ \sin\varphi \geqslant 0 \\ \Downarrow \\ |\sin\varphi| = \sin\varphi \end{array} \right| =$$

Пример (продолжение)

Найдем производную $r'(\varphi)$: $r'(\varphi) = R' = 0$, так как R – постоянная величина (фиксированное число).

Воспользуемся формулой (11):

$$S = 2\pi \int\limits_0^{\pi} R|\sin\varphi|\sqrt{R^2 + 0^2}d\varphi = 2\pi R^2 \int\limits_0^{\pi} |\sin\varphi|d\varphi =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \text{при } \varphi \in [0;\pi] \ \ \sin\varphi \geqslant 0 \\ \Downarrow \\ |\sin\varphi| = \sin\varphi \end{array} \right| =$$

$$= 2\pi R^2 \int\limits_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi$$

Пример (продолжение)

Найдем производную $r'(\varphi)$: $r'(\varphi) = R' = 0$, так как R – постоянная величина (фиксированное число).

Воспользуемся формулой (11):

$$S = 2\pi \int\limits_0^{\pi} R|\sin\varphi|\sqrt{R^2 + 0^2}d\varphi = 2\pi R^2 \int\limits_0^{\pi} |\sin\varphi|d\varphi =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \text{при } \varphi \in [0;\pi] \ \ \sin\varphi \geqslant 0 \\ \Downarrow \\ |\sin\varphi| = \sin\varphi \end{array} \right| =$$

$$= 2\pi R^2 \int\limits_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi = 2\pi R^2(-\cos\varphi)\Big|_0^{\pi}$$

Пример (продолжение)

Найдем производную $r'(\varphi)$: $r'(\varphi) = R' = 0$, так как R – постоянная величина (фиксированное число).

Воспользуемся формулой (11):

$$S = 2\pi \int\limits_0^{\pi} R|\sin\varphi|\sqrt{R^2 + 0^2}d\varphi = 2\pi R^2 \int\limits_0^{\pi} |\sin\varphi|d\varphi =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \text{при } \varphi \in [0;\pi] \ \ \sin\varphi \geqslant 0 \\ \Downarrow \\ |\sin\varphi| = \sin\varphi \end{array} \right| =$$

$$= 2\pi R^2 \int\limits_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi = 2\pi R^2(-\cos\varphi)\Big|_0^{\pi} = 4\pi R^2$$