Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Математический анализ

Модуль 2. Пределы и непрерывность функций одной переменной

Лекция 2.4

к.ф.-м.н. Семакин А.Н.

Непрерывность функции

Определение
Функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности $U(a)$ точки a, называется **непрерывной** в этой точке, если

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Эквивалентное определение
Функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности $U(a)$ точки a, называется **непрерывной** в этой точке, если
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x \in R, |x - a| < \delta$:
$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Непрерывность функции

Обозначение: $f(x) \in C(a)$

Обозначение: $f(x) \in C(a)$- функция $f(x)$ непрерывна в точке a.

Обозначение: $f(x) \in C(a)$- функция $f(x)$ непрерывна в точке a.

Замечание

Непрерывность функции

Обозначение: $f(x) \in C(a)$- функция $f(x)$ непрерывна в точке a.

Замечание

Непрерывность функции предполагает, что эта функция определена в некоторой окрестности точки a, включая саму точку a.

Геометрическая интерпретация

Геометрическая интерпретация

Графически непрерывность функции в точке a означает, что ее график в окрестности точки a представляет собой сплошную линию, которая не претерпевает каких-либо разрывов при переходе через саму точку a

Геометрическая интерпретация

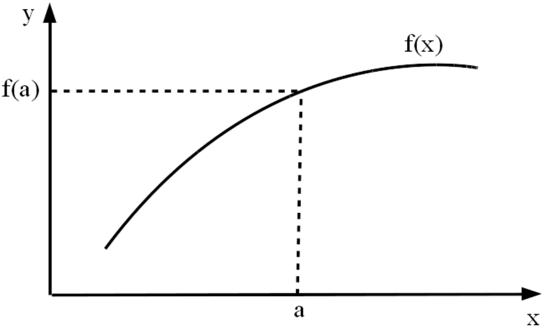


Рис.: Непрерывность функции в точке a

Непрерывность функции

$\Leftrightarrow$ - знак равносильности и эквивалентности.

$\Leftrightarrow$ - знак равносильности и эквивалентности. Если этот знак присутствует в тексте определений и теорем, то он часто читается как

Непрерывность функции

$\Leftrightarrow$ - знак равносильности и эквивалентности. Если этот знак присутствует в тексте определений и теорем, то он часто читается как

1) необходимо и достаточно,

Непрерывность функции

$\Leftrightarrow$ - знак равносильности и эквивалентности. Если этот знак присутствует в тексте определений и теорем, то он часто читается как

1) необходимо и достаточно,
2) тогда и только тогда, когда.

Пример:

Непрерывность функции

Пример: Выражение $A \Leftrightarrow B$ читается как

Пример: Выражение $A \Leftrightarrow B$ читается как
1. Утверждение A справедливо тогда и только тогда, когда справедливо утверждение B.

Пример: Выражение $A \Leftrightarrow B$ читается как
1. Утверждение A справедливо тогда и только тогда, когда справедливо утверждение B.
2. Для справедливости утверждения A необходимо и достаточно справедливость утверждения B.

Запись $A \Leftrightarrow B$ означает, что одновременно выполняются два условия:

Запись $A \Leftrightarrow B$ означает, что одновременно выполняются два условия:

1) $A \Rightarrow B$ - если справедливо A, то справедливо B (необходимость),

Непрерывность функции

Запись $A \Leftrightarrow B$ означает, что одновременно выполняются два условия:

1) $A \Rightarrow B$ - если справедливо A, то справедливо B (необходимость),

2) $A \Leftarrow B$ - если справедливо B, то справедливо A (достаточность).

Запись $A \Leftrightarrow B$ означает, что одновременно выполняются два условия:
1) $A \Rightarrow B$ - если справедливо A, то справедливо B (необходимость),
2) $A \Leftarrow B$ - если справедливо B, то справедливо A (достаточность).
Другими словами, утверждения A и B справедливы или нет одновременно.

Введем обозначения:

Непрерывность функции

Введем обозначения:

$\Delta x = x - a$ - приращение аргумента, Введем обозначения:

$\Delta x = x - a$ - приращение аргумента,

$\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$ - приращение функции в точке a.

*Теорема (необходимое и достаточное условие непрерывности функции в точке)**

*Теорема (необходимое и достаточное условие непрерывности функции в точке)**

$$f(x) \in C(a) \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0.$$

Расшифровка математической записи:

Расшифровка математической записи:
$f(x) \in C(a)$ - для того чтобы функция $f(x)$ была непрерывна в точке a

Расшифровка математической записи:

$f(x) \in C(a)$ - для того чтобы функция $f(x)$ была непрерывна в точке a

$\Leftrightarrow$ - необходимо и достаточно, чтобы

Непрерывность функции

Расшифровка математической записи:

$f(x) \in C(a)$ - для того чтобы функция $f(x)$ была непрерывна в точке a

$\Leftrightarrow$ - необходимо и достаточно, чтобы

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$ - предел приращения функции равнялся нулю при стремлении к нулю приращения аргумента

Доказательство

Доказательство

1) необходимость

Доказательство

1) необходимость

Дано: $f(x) \in C(a)$

Непрерывность функции

Доказательство

1) необходимость

Дано: $f(x) \in C(a)$

Доказать: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$

Непрерывность функции

$f(x) \in C(a)$

Непрерывность функции

$f(x) \in C(a) \Rightarrow$

Непрерывность функции

$f(x) \in C(a) \Rightarrow$
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in R, |x - a| < \delta$:
$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Непрерывность функции

$f(x) \in C(a) \Rightarrow$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x \in R, |x - a| < \delta$:
$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.
$\Delta x = x - a$

Непрерывность функции

$f(x) \in C(a) \Rightarrow$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x \in R, |x - a| < \delta$:
$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.
$\Delta x = x - a \Rightarrow$

Непрерывность функции

$$f(x) \in C(a) \Rightarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) > 0 \; \forall x \in R, |x - a| < \delta:$$
$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$
$$\Delta x = x - a \Rightarrow x = a + \Delta x$$

Непрерывность функции

$f(x) \in C(a) \Rightarrow$
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) > 0 \; \forall x \in R, |x - a| < \delta$:
$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.
$\Delta x = x - a \Rightarrow x = a + \Delta x \Rightarrow$

$$f(x) \in C(a) \Rightarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x \in R, |x - a| < \delta:$$
$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$
$$\Delta x = x - a \Rightarrow x = a + \Delta x \Rightarrow$$
$$f(x) - f(a) =$$

Непрерывность функции

$$f(x) \in C(a) \Rightarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x \in R, |x - a| < \delta:$$
$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$
$$\Delta x = x - a \Rightarrow x = a + \Delta x \Rightarrow$$
$$f(x) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a) =$$

Непрерывность функции

$$f(x) \in C(a) \Rightarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in R, |x - a| < \delta:$$
$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$
$$\Delta x = x - a \Rightarrow x = a + \Delta x \Rightarrow$$
$$f(x) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a) = \Delta f.$$

Непрерывность функции

Тогда условие непрерывности функции в точке можно переписать в виде:

Непрерывность функции

Тогда условие непрерывности функции в точке можно переписать в виде:
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall \Delta x \in R, |\Delta x| < \delta$:
$|\Delta f| < \varepsilon$.

Тогда условие непрерывности функции в точке можно переписать в виде:
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) > 0 \; \forall \Delta x \in R, |\Delta x| < \delta$:
$|\Delta f| < \varepsilon$.
Это означает, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$.

2) достаточность

2) достаточность

Дано: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$

2) достаточность

Дано: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$

Доказать: $f(x) \in C(a)$

Непрерывность функции

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0 \Rightarrow$$

Непрерывность функции

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0 \Rightarrow$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall \Delta x \in R, |\Delta x| < \delta$:

$|\Delta f| < \varepsilon$.

Непрерывность функции

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0 \Rightarrow$
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) > 0 \; \forall \Delta x \in R, |\Delta x| < \delta$:
$|\Delta f| < \varepsilon$.
Так как

Непрерывность функции

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0 \Rightarrow$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall \Delta x \in R, |\Delta x| < \delta$:
$|\Delta f| < \varepsilon$.
Так как
$\Delta x = x - a$,

Непрерывность функции

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0 \Rightarrow$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall \Delta x \in R, |\Delta x| < \delta$:
$|\Delta f| < \varepsilon$.

Так как

$\Delta x = x - a, \Delta f = f(a + \Delta x) - f(a) =$

Непрерывность функции

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0 \Rightarrow$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall \Delta x \in R, |\Delta x| < \delta$:
$|\Delta f| < \varepsilon$.
Так как
$\Delta x = x - a, \Delta f = f(a + \Delta x) - f(a) = f(x) - f(a),$

Непрерывность функции

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0 \Rightarrow$
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) > 0 \; \forall \Delta x \in R, |\Delta x| < \delta$:
$|\Delta f| < \varepsilon$.
Так как
$\Delta x = x - a, \Delta f = f(a + \Delta x) - f(a) = f(x) - f(a)$,
то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0 \Rightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall \Delta x \in R, |\Delta x| < \delta:$$

$$|\Delta f| < \varepsilon.$$

Так как

$$\Delta x = x - a, \Delta f = f(a + \Delta x) - f(a) = f(x) - f(a),$$

то

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x \in R, |x - a| < \delta:$$

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0 \Rightarrow$
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ \forall \Delta x \in R, |\Delta x| < \delta$:
$|\Delta f| < \varepsilon$.
Так как
$\Delta x = x - a, \Delta f = f(a + \Delta x) - f(a) = f(x) - f(a)$,
то
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in R, |x - a| < \delta$:
$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.
$\Rightarrow f(x) \in C(a)$. ■

Односторонняя непрерывность

Определение

Пусть функция $f(x)$ определена на полуинтервале $(a, c]$. Функция $f(x)$ называется **непрерывной слева** в точке c, если

$$\lim_{x \to c-0} f(x) = f(c).$$

Определение

Пусть функция $f(x)$ определена на полуинтервале $[c, b)$. Функция $f(x)$ называется **непрерывной справа** в точке c, если

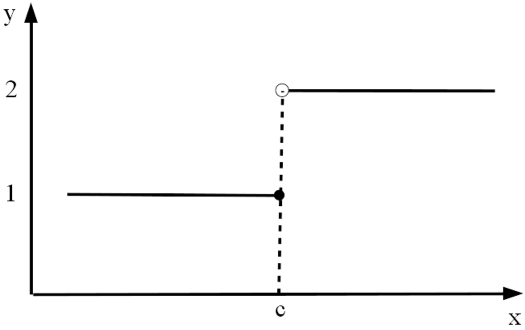
$$\lim_{x \to c+0} f(x) = f(c).$$

Односторонняя непрерывность

Пример функции, непрерывной слева:

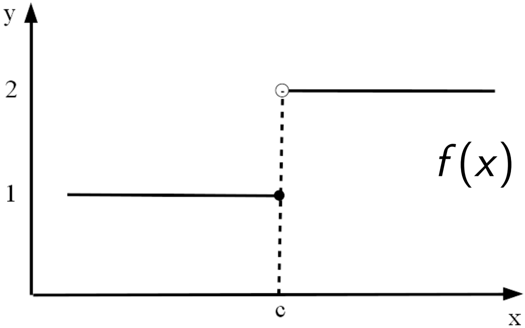
Односторонняя непрерывность

Пример функции, непрерывной слева:



Односторонняя непрерывность

Пример функции, непрерывной слева:



$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \le c \\ 2, & x > c \end{cases}$$

Точки разрыва

Точки разрыва

Определение

Точка a называется **точкой разрыва** функции $f(x)$, если $f(x)$ не определена в точке a или определена, но не является в ней непрерывной.

Классификация точек разрыва

Классификация точек разрыва

1. Если a - точка разрыва функции $f(x)$ и существуют конечные пределы

$$f(a-0)=\lim_{x\to a-0} f(x),$$

$$f(a+0)=\lim_{x\to a+0} f(x),$$

то точка a называется **точкой разрыва первого рода**.

Классификация точек разрыва

2. Если a - точка разрыва первого рода и

$$f(a-0)=f(a+0),$$

то a называется **точкой устранимого разрыва**.

Классификация точек разрыва

3. Точка разрыва функции $f(x)$, не являющаяся точкой разрыва первого рода, называется **точкой разрыва второго рода**.

Точки разрыва

Примеры:

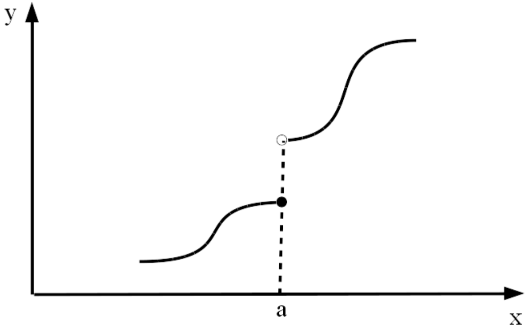
Точки разрыва

Примеры:

1) точка разрыва 1-ого рода

Примеры:

1) точка разрыва 1-ого рода



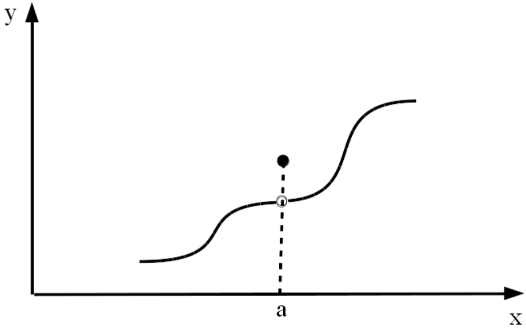
Точки разрыва

Примеры:

2) точка устранимого разрыва

Примеры:

2) точка устранимого разрыва



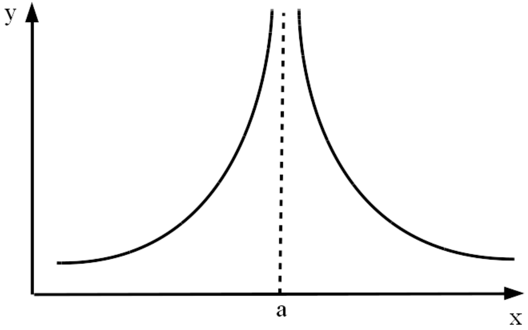
Точки разрыва

Примеры:

3) точка разрыва 2-ого рода

Примеры:

3) точка разрыва 2-ого рода



Свойства функций, непрерывных в точке

Теорема (арифметические свойства непрерывных функций)

Теорема (арифметические свойства непрерывных функций)
Если $f(x), g(x) \in C(a)$, то

Теорема (арифметические свойства непрерывных функций)
Если $f(x), g(x) \in C(a)$, то
1) $f + g \in C(a)$

Теорема (арифметические свойства непрерывных функций)

Если $f(x), g(x) \in C(a)$, то

1) $f + g \in C(a)$

2) $f \cdot g \in C(a)$

Свойства функций, непрерывных в точке

Теорема (арифметические свойства непрерывных функций)

Если $f(x), g(x) \in C(a)$, то

1) $f + g \in C(a)$

2) $f \cdot g \in C(a)$

3) $f/g \in C(a)$, если $g(a) \neq 0$

Теорема (непрерывность сложной функции)

Теорема (непрерывность сложной функции)
Если $f(x) \in C(a)$ и $g(y) \in C(b)$, где $b = f(a)$, то $g(f(x)) \in C(a)$.

*Теорема (непрерывность основных элементарных функций)**

*Теорема (непрерывность основных элементарных функций)**

Основные элементарные функции непрерывны всюду в их области определения.

Доказательство для $y = \sin x$

Свойства функций, непрерывных в точке

Доказательство для $y = \sin x$

$\Delta f =$

Свойства функций, непрерывных в точке

Доказательство для $y = \sin x$

$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) =$

Свойства функций, непрерывных в точке

Доказательство для $y = \sin x$

$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = \sin(x+\Delta x) - \sin x =$

Доказательство для $y = \sin x$

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = \sin(x+\Delta x) - \sin x =$$
$$= 2\sin\frac{x+\Delta x - x}{2}\cos\frac{x+\Delta x + x}{2} =$$

Доказательство для $y = \sin x$

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = \sin(x+\Delta x) - \sin x =$$
$$= 2\sin\frac{x+\Delta x - x}{2}\cos\frac{x+\Delta x + x}{2} =$$
$$= 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Свойства функций, непрерывных в точке

Доказательство для $y = \sin x$

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = \sin(x+\Delta x) - \sin x =$$

$$= 2\sin\frac{x+\Delta x - x}{2}\cos\frac{x+\Delta x + x}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f =$$

Доказательство для $y = \sin x$

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = \sin(x+\Delta x) - \sin x =$$

$$= 2\sin\frac{x+\Delta x - x}{2}\cos\frac{x+\Delta x + x}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2}).$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f = \lim_{\Delta x\to 0} 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2}) =$$

Свойства функций, непрерывных в точке

Доказательство для $y = \sin x$

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = \sin(x+\Delta x) - \sin x =$$

$$= 2\sin\frac{x+\Delta x - x}{2}\cos\frac{x+\Delta x + x}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2}).$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f = \lim_{\Delta x\to 0} 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2}) =$$

$= \big|$бесконечно малая $\cdot$ ограниченная $=$ бесконечно малая$\big|$

Доказательство для $y = \sin x$

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = \sin(x+\Delta x) - \sin x =$$

$$= 2\sin\frac{x+\Delta x - x}{2}\cos\frac{x+\Delta x + x}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2}).$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f = \lim_{\Delta x\to 0} 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2}) =$$

$= \Big|$бесконечно малая $\cdot$ ограниченная $=$ бесконечно малая$\Big| = 0$

Доказательство для $y = \sin x$

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = \sin(x+\Delta x) - \sin x =$$
$$= 2\sin\frac{x+\Delta x - x}{2}\cos\frac{x+\Delta x + x}{2} =$$
$$= 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2}).$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f = \lim_{\Delta x\to 0} 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2}) =$$
$= \big|$бесконечно малая $\cdot$ ограниченная $=$ бесконечно малая$\big| = 0$

$\Rightarrow \sin x \in C(x)$. ■

Теорема (непрерывность элементарной функции)

Свойства функций, непрерывных в точке

Теорема (непрерывность элементарной функции)
Любая элементарная функция непрерывна в любой точке области ее определения.