Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет "Фундаментальные науки"
Кафедра "Высшая математика"

Математический анализ

Модуль 2. Пределы и непрерывность функций одной переменной

Лекция 2.3

к.ф.-м.н. Семакин А.Н.

Сравнение функций

Сравнение функций

Пусть $\overset{\circ}{U}(a)$ - некоторая проколотая окрестность точки a.

Сравнение функций

Пусть $\overset{\circ}{U}(a)$ - некоторая проколотая окрестность точки a.

Определение

Функция $f(x)$ называется **ограниченной по сравнению** с функцией $g(x)$ в $\overset{\circ}{U}(a)$, если $\exists c > 0 \; \forall x \in \overset{\circ}{U}(a)$: $|f(x)| \leq c \cdot |g(x)|$.

Сравнение функций

Пусть $\overset{\circ}{U}(a)$ - некоторая проколотая окрестность точки a.

Определение

Функция $f(x)$ называется **ограниченной по сравнению** с функцией $g(x)$ в $\overset{\circ}{U}(a)$, если $\exists c > 0\ \forall x \in \overset{\circ}{U}(a)$: $|f(x)| \leq c \cdot |g(x)|$.

Обозначение: $f(x) = O(g(x)), x \to a$.

Пусть $\overset{\circ}{U}(a)$ - некоторая проколотая окрестность точки a.

Определение

Функция $f(x)$ называется **ограниченной по сравнению** с функцией $g(x)$ в $\overset{\circ}{U}(a)$, если $\exists c > 0\ \forall x \in \overset{\circ}{U}(a)$: $|f(x)| \leq c \cdot |g(x)|$.

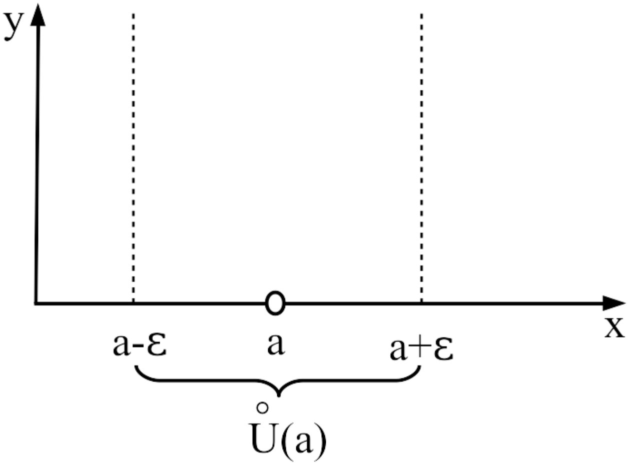
Обозначение: $f(x) = O(g(x)), x \to a$.

Произношение: f - это "O"-большое от g.

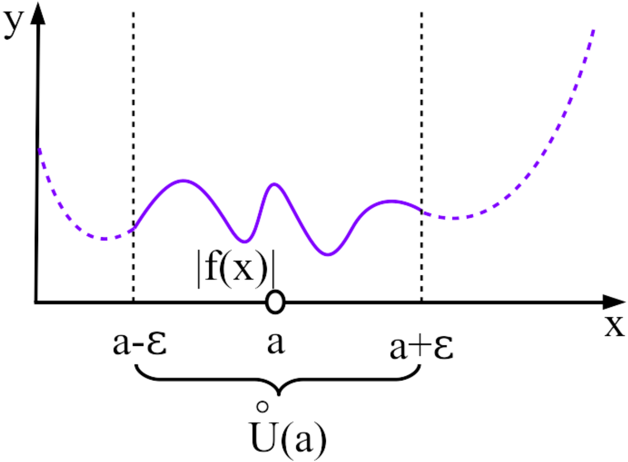
Сравнение функций

Пример:

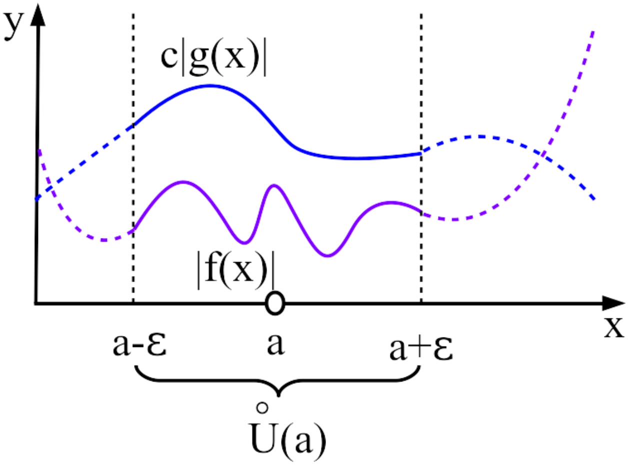
Пример:



Пример:



Пример:



Определение

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что $f(x) = O(g(x))$ и $g(x) = O(f(x))$ при $x \to a$, то они называются **функциями одного порядка** при $x \to a$.

Определение

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что $f(x) = O(g(x))$ и $g(x) = O(f(x))$ при $x \to a$, то они называются **функциями одного порядка** при $x \to a$.

Обозначение: $f(x) \asymp g(x), x \to a$.

Определение

Пусть $f(x) \neq 0$ и $g(x) \neq 0$ $\forall x \in \overset{\circ}{U}(a)$. Тогда функции $f(x)$ и $g(x)$ называются **эквивалентными** при $x \to a$, если

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Определение

Пусть $f(x) \neq 0$ и $g(x) \neq 0$ $\forall x \in \overset{\circ}{U}(a)$. Тогда функции $f(x)$ и $g(x)$ называются **эквивалентными** при $x \to a$, если

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Обозначение: $f(x) \sim g(x), x \to a$.

Свойства эквивалентных функций

Сравнение функций

Свойства эквивалентных функций

1) если $f \sim g, x \to a$, то $g \sim f, x \to a$

2) если $f \sim g$ и $g \sim h, x \to a$, то $f \sim h, x \to a$

Сравнение функций

Определение

Пусть $f(x) \neq 0 \ \forall x \in \overset{\circ}{U}(a)$. Тогда функция $g(x)$ называется **бесконечно малой по сравнению** с функцией $f(x)$ при $x \to a$, если

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0.$$

Определение

Пусть $f(x) \neq 0 \ \forall x \in \overset{\circ}{U}(a)$. Тогда функция $g(x)$ называется **бесконечно малой по сравнению** с функцией $f(x)$ при $x \to a$, если

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0.$$

Обозначение: $g(x) = \circ(f(x)), x \to a$.

Определение

Пусть $f(x) \neq 0 \ \forall x \in \overset{\circ}{U}(a)$. Тогда функция $g(x)$ называется **бесконечно малой по сравнению** с функцией $f(x)$ при $x \to a$, если

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0.$$

Обозначение: $g(x) = \circ(f(x)), x \to a$.

Произношение: g - это "o"-малое от f при $x \to a$.

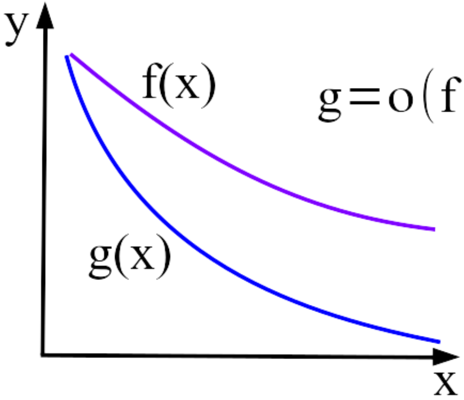
Сравнение функций

Если $f(x)$ является бесконечно малой функцией при $x \to a$, то говорят, что $g(x)$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем $f(x)$.

Сравнение функций

Пример:

Пример:



$$g = o(f),\ x \to +\infty$$

Сравнение функций

Здесь обе функции f и g стремятся к нулю при $x \to +\infty$, только функция g убывает быстрее, чем функция f.

Свойства "о"-малое

Свойства “o”-малое

1) $o(f) + o(f) = o(f)$

2) $o(cf) = o(f), c \neq 0$

3) $c \cdot o(f) = o(f), c \neq 0$

4) $o(o(f)) = o(f)$

5) $o(f + o(f)) = o(f)$

6) $o(f^n) \cdot o(f^m) = o(f^{n+m})$

7) $(o(f))^n = o(f^n)$

*Теорема (о связи эквивалентности и “о”-малое)**

*Теорема (о связи эквивалентности и “о”-малое)**
Для того, чтобы функции $f(x)$ и $g(x)$ были эквивалентны при $x \to a$ необходимо и достаточно, чтобы при $x \to a$ выполнялось условие

$$f(x) = g(x) + \circ(g(x)).$$

Доказательство

Доказательство

1) необходимость

Доказательство

1) необходимость

Дано: $f(x) \sim g(x), x \to a$.

Доказать: $f(x) = g(x) + \circ(g(x)), x \to a$.

Сравнение функций

Введем функцию $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Сравнение функций

Введем функцию $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Так как $f(x) \sim g(x), x \to a$, то

Введем функцию $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Так как $f(x) \sim g(x), x \to a$, то

$$\lim_{x \to a} \varphi(x) =$$

Сравнение функций

Введем функцию $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Так как $f(x) \sim g(x), x \to a$, то

$$\lim_{x\to a} \varphi(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} =$$

Введем функцию $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Так как $f(x) \sim g(x), x \to a$, то

$$\lim_{x\to a} \varphi(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Введем функцию $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Так как $f(x) \sim g(x), x \to a$, то

$$\lim_{x\to a} \varphi(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

$f(x) - g(x) =$

Сравнение функций

Введем функцию $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Так как $f(x) \sim g(x), x \to a$, то

$$\lim_{x\to a} \varphi(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

$$f(x) - g(x) = \varphi(x)g(x) - g(x) =$$

Сравнение функций

Введем функцию $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Так как $f(x) \sim g(x), x \to a$, то

$$\lim_{x\to a} \varphi(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

$$f(x) - g(x) = \varphi(x)g(x) - g(x) = (\varphi(x) - 1)g(x).$$

Сравнение функций

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} =$$

Сравнение функций

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{(\varphi(x) - 1)g(x)}{g(x)} =$$

Сравнение функций

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{(\varphi(x)-1)g(x)}{g(x)}=$$
$$=\lim_{x\to a}(\varphi(x)-1)=$$

Сравнение функций

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{(\varphi(x)-1)g(x)}{g(x)} =$$
$$= \lim_{x\to a}(\varphi(x)-1) = 1-1 = 0.$$

Сравнение функций

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{(\varphi(x)-1)g(x)}{g(x)} =$$
$$= \lim_{x\to a}(\varphi(x)-1) = 1-1=0.$$
$$\Rightarrow f(x)-g(x) = \circ(g(x)), x\to a.$$

Сравнение функций

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{(\varphi(x)-1)g(x)}{g(x)}=$$
$$=\lim_{x\to a}(\varphi(x)-1)=1-1=0.$$
$$\Rightarrow f(x)-g(x)=\circ(g(x)),x\to a.$$
$$\Rightarrow f(x)=g(x)+\circ(g(x)),x\to a.$$

Сравнение функций

2) достаточность

2) достаточность

Дано: $f(x) = g(x) + \circ(g(x)), x \to a$.

Доказать: $f(x) \sim g(x), x \to a$.

Сравнение функций

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} =$$

Сравнение функций

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{g(x)+\circ(g(x))}{g(x)} =$$

Сравнение функций

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{g(x)+\circ(g(x))}{g(x)} =$$
$$= \lim_{x\to a}\left(1+\frac{\circ(g(x))}{g(x)}\right) =$$

Сравнение функций

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{g(x)+\circ(g(x))}{g(x)} =$$

$$= \lim_{x\to a}(1+\frac{\circ(g(x))}{g(x)}) = 1+\lim_{x\to a}\frac{\circ(g(x))}{g(x)} =$$

Сравнение функций

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{g(x)+\circ(g(x))}{g(x)} =$$
$$= \lim_{x\to a}(1+\frac{\circ(g(x))}{g(x)}) = 1+\lim_{x\to a}\frac{\circ(g(x))}{g(x)} =$$
$$= 1+0=1.$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{g(x)+\circ(g(x))}{g(x)} =$$
$$= \lim_{x\to a}(1+\frac{\circ(g(x))}{g(x)}) = 1+\lim_{x\to a}\frac{\circ(g(x))}{g(x)} =$$
$$= 1+0 = 1.$$
$$\Rightarrow f(x)\sim g(x), x\to a. \blacksquare$$

*Теорема (о пределах эквивалентных функций)**

*Теорема (о пределах эквивалентных функций)**
Пусть $f(x) \sim f_1(x)$ и $g(x) \sim g_1(x)$ при $x \to a$. Тогда если существует $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)/g_1(x)$, то существует и $\lim\limits_{x\to a} f(x)/g(x)$, причем

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}.$$

Доказательство

Доказательство

$$\lim_{x \to a} \frac{f}{g} =$$

Доказательство

$$\lim_{x\to a}\frac{f}{g} = \lim_{x\to a}\frac{f\cdot f_1\cdot g_1}{f_1\cdot g_1\cdot g} =$$

Доказательство

$$\lim_{x\to a}\frac{f}{g} = \lim_{x\to a}\frac{f\cdot f_1\cdot g_1}{f_1\cdot g_1\cdot g} =$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{f}{f_1}\cdot\lim_{x\to a}\frac{f_1}{g_1}\cdot\lim_{x\to a}\frac{g_1}{g} =$$

Доказательство

$$\lim_{x\to a}\frac{f}{g} = \lim_{x\to a}\frac{f\cdot f_1\cdot g_1}{f_1\cdot g_1\cdot g} =$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{f}{f_1}\cdot\lim_{x\to a}\frac{f_1}{g_1}\cdot\lim_{x\to a}\frac{g_1}{g} = \lim_{x\to a}\frac{f_1}{g_1}. \blacksquare$$

Сравнение функций

Для применения этой теоремы необходимо знать таблицу эквивалентных функций.

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций

Сравнение функций

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций

1) $\sin x \sim x, x \to 0$

2) $\operatorname{tg} x \sim x, x \to 0$

3) $\arcsin x \sim x, x \to 0$

4) $\operatorname{arctg} x \sim x, x \to 0$

5) $1 - \cos x \sim x^2/2, x \to 0$

Сравнение функций

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций

6) $\ln(1+x) \sim x, x \to 0$

7) $e^x - 1 \sim x, x \to 0,$

8) $a^x - 1 \sim x \ln a, x \to 0$

9) $(1+x)^m - 1 \sim mx, x \to 0$

Сравнение функций

Используя теорему о замене переменной можно показать, что в данной таблице отношение эквивалентности сохранится, если переменную x заменить на какую-либо функцию u.

Сравнение функций

Примеры:

Сравнение функций

Примеры:

1) $\sin u \sim u, u \to 0$

2) $\operatorname{tg} u \sim u, u \to 0$

3) $e^u - 1 \sim u, u \to 0$

Примеры:

1) $\sin u \sim u, u \to 0$

2) $\operatorname{tg} u \sim u, u \to 0$

3) $e^u - 1 \sim u, u \to 0$

Здесь $u = u(x)$ - некоторая функция, которая должна стремиться к нулю: $u \to 0$.

Определение

Функция $f(x)$ называется **бесконечно малой порядка r относительно** функции $g(x)$, если существует не равный нулю конечный предел

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{(g(x))^r}.$$

Определение

Если функция $f(x)$ представима в виде $f(x) = g(x) + \circ(g(x)), x \to a$, то функция $g(x)$ называется **главной частью** функции $f(x)$.

Теорема

Теорема

Если функция $f(x)$ обладает при $x \to a$ главной частью вида $A(x-a)^k$, где A и k - постоянные числа, то среди всех главных частей такого вида она определяется единственным образом.