Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Математический анализ

Модуль 2. Пределы и непрерывность функций одной переменной

Лекция 2.1

к.ф.-м.н. Семакин А.Н.

Окрестность точки

Окрестность точки

Под точкой понимается как действительное число, так и элементы $+\infty$, $-\infty$, ∞.

Определение

ε-**окрестность** точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

Окрестность точки

Определение

ε-**окрестность** точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

1) a - действительное число

Окрестность точки

Определение

ε-**окрестность** точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

1) a - действительное число

$$U(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

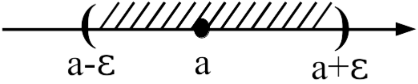
Окрестность точки

Определение

ε-**окрестность** точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

1) a - действительное число

$U(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$



Определение

ε-**окрестность** точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

2) $a = +\infty$

Определение

ε-**окрестность** точки a обозначается как $U(a,\varepsilon)$ и определяется по формулам:

2) $a = +\infty$

$U(+\infty,\varepsilon) = (\varepsilon,+\infty]$

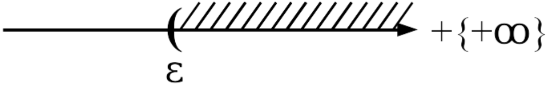
Окрестность точки

Определение

ε-**окрестность** точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

2) $a = +\infty$

$U(+\infty, \varepsilon) = (\varepsilon, +\infty]$



Окрестность точки

Определение

ε-**окрестность** точки a обозначается как $U(a,\varepsilon)$ и определяется по формулам:

3) $a = -\infty$

Определение

ε-**окрестность** точки a обозначается как $U(a,\varepsilon)$ и определяется по формулам:

3) $a=-\infty$

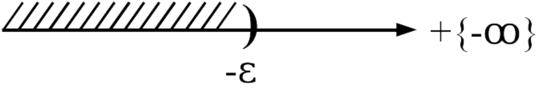
$U(-\infty,\varepsilon)=[-\infty,-\varepsilon)$

Определение

ε-**окрестность** точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

3) $a = -\infty$

$U(-\infty, \varepsilon) = [-\infty, -\varepsilon)$



Окрестность точки

Определение

ε-**окрестность** точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

4) $a = \infty$

Определение

ε-**окрестность** точки a обозначается как $U(a, \varepsilon)$ и определяется по формулам:

4) $a = \infty$

$$U(\infty, \varepsilon) = (-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, +\infty) \cup \{\infty\}$$

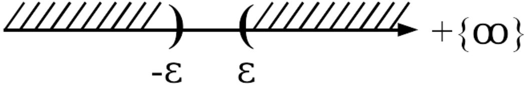
Окрестность точки

Определение

ε-**окрестность** точки a обозначается как $U(a,\varepsilon)$ и определяется по формулам:

4) $a=\infty$

$$U(\infty,\varepsilon)=(-\infty,-\varepsilon)\cup(\varepsilon,+\infty)\cup\{\infty\}$$



Окрестность точки

ε-окрестность часто называют **окрестностью** и обозначают $U(a)$, опуская символ ε.

Окрестность точки

ε-окрестность часто называют **окрестностью** и обозначают $U(a)$, опуская символ ε. В этом случае ε просто подразумевается.

Окрестность точки

ε-окрестность часто называют **окрестностью** и обозначают $U(a)$, опуская символ ε. В этом случае ε просто подразумевается. Обозначения $U(a, \varepsilon)$ и $U(a)$ эквивалентны.

Определение

Проколотой окрестностью точки a называется окрестность без самой точки a, т.е.

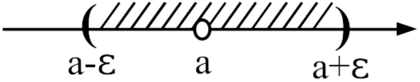
$$\overset{\circ}{U}(a,\varepsilon) = U(a,\varepsilon)\backslash a.$$

Окрестность точки

Определение

Проколотой окрестностью точки a называется окрестность без самой точки a, т.е.

$$\overset{\circ}{U}(a, \varepsilon) = U(a, \varepsilon) \setminus a.$$



Окрестность точки

Помимо двусторонней окрестности $U(a)$ для действительных чисел можно ввести односторонние окрестности:

Окрестность точки

Помимо двусторонней окрестности $U(a)$ для действительных чисел можно ввести односторонние окрестности:
1) правосторонняя

Окрестность точки

Помимо двусторонней окрестности $U(a)$ для действительных чисел можно ввести односторонние окрестности:

1) правосторонняя

$$U_+(a, \varepsilon) = [a, a + \varepsilon), \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon) = (a, a + \varepsilon)$$

Помимо двусторонней окрестности $U(a)$ для действительных чисел можно ввести односторонние окрестности:

1) правосторонняя

$$U_+(a,\varepsilon) = [a, a+\varepsilon),\ \overset{\circ}{U}_+(a,\varepsilon) = (a, a+\varepsilon)$$

2) левосторонняя

Окрестность точки

Помимо двусторонней окрестности $U(a)$ для действительных чисел можно ввести односторонние окрестности:

1) правосторонняя

$$U_+(a,\varepsilon) = [a, a+\varepsilon), \overset{\circ}{U}_+(a,\varepsilon) = (a, a+\varepsilon)$$

2) левосторонняя

$$U_-(a,\varepsilon) = (a-\varepsilon, a], \overset{\circ}{U}_-(a,\varepsilon) = (a-\varepsilon, a)$$

Типы стремления переменной к точке

Типы стремления переменной к точке

Рассмотрим произвольную переменную x, которая принимает последовательность значений $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$.

Типы стремления переменной к точке

Рассмотрим произвольную переменную x, которая принимает последовательность значений $x_1, x_2, ..., x_n, ...$. В зависимости от вида последовательности $\{x_n\}$ можно выделить несколько типов стремления переменной x к точке.

Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление

Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление

$x \to a \pm 0, a \in R$, если

Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление

$x \to a \pm 0, a \in R$, если

$\forall \overset{\circ}{U}_{\pm}(a, \varepsilon)\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n \in \overset{\circ}{U}_{\pm}(a, \varepsilon)$

Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление

$x \to a \pm 0, a \in R$, если

$\forall \overset{\circ}{U}_{\pm}(a,\varepsilon)\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n \in \overset{\circ}{U}_{\pm}(a,\varepsilon)$

Примеры:

Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление

$x \to a \pm 0, a \in R$, если

$\forall \overset{\circ}{U}_{\pm}(a, \varepsilon)\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n \in \overset{\circ}{U}_{\pm}(a, \varepsilon)$

Примеры:

а) стремление справа

Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление

$x \to a \pm 0, a \in R$, если

$\forall \overset{\circ}{U}_{\pm}(a, \varepsilon)\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n \in \overset{\circ}{U}_{\pm}(a, \varepsilon)$

Примеры:

а) стремление справа - $x \to a + 0$, $n(\varepsilon) = 2$

Типы стремления переменной к точке

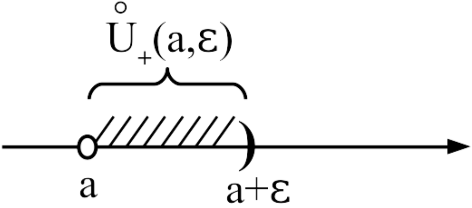
1. Одностороннее стремление

$x \to a \pm 0$, $a \in R$, если

$\forall \overset{\circ}{U}_{\pm}(a, \varepsilon)\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n \in \overset{\circ}{U}_{\pm}(a, \varepsilon)$

Примеры:

а) стремление справа - $x \to a + 0$, $n(\varepsilon) = 2$



Типы стремления переменной к точке

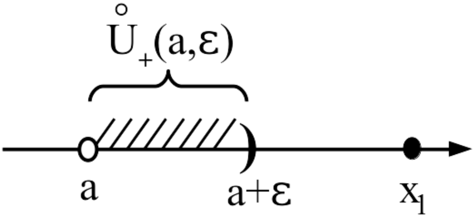
1. Одностороннее стремление

$x \to a \pm 0$, $a \in R$, если

$\forall \ \overset{\circ}{U}_{\pm}(a,\varepsilon) \ \exists n(\varepsilon) \in N \ \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n \in \overset{\circ}{U}_{\pm}(a,\varepsilon)$

Примеры:

а) стремление справа - $x \to a + 0$, $n(\varepsilon) = 2$



Типы стремления переменной к точке

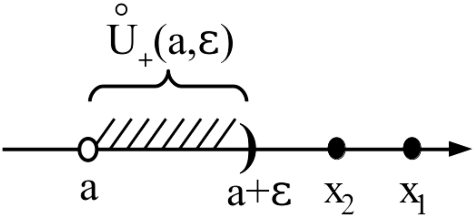
1. Одностороннее стремление

$x \to a \pm 0, a \in R$, если

$\forall \overset{\circ}{U}_{\pm}(a, \varepsilon)\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n \in \overset{\circ}{U}_{\pm}(a, \varepsilon)$

Примеры:

а) стремление справа - $x \to a + 0$, $n(\varepsilon) = 2$



Типы стремления переменной к точке

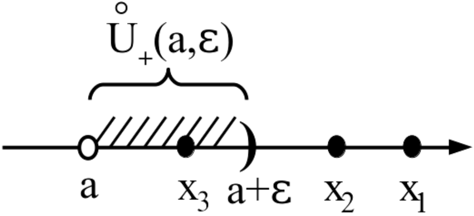
1. Одностороннее стремление

$x \to a \pm 0,\ a \in R$, если

$\forall\ \overset{\circ}{U}_{\pm}(a,\varepsilon)\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon x_n \in \overset{\circ}{U}_{\pm}(a,\varepsilon)$

Примеры:

а) стремление справа - $x \to a + 0,\ n(\varepsilon) = 2$



Типы стремления переменной к точке

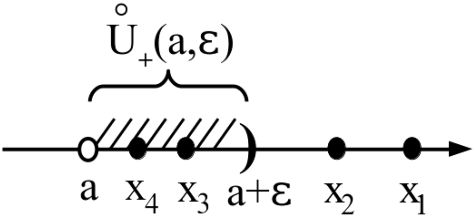
1. Одностороннее стремление

$x \to a \pm 0,\ a \in R$, если

$\forall\ \mathring{U}_{\pm}\,(a,\varepsilon)\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon x_n \in \mathring{U}_{\pm}\,(a,\varepsilon)$

Примеры:

а) стремление справа - $x \to a + 0,\ n(\varepsilon) = 2$



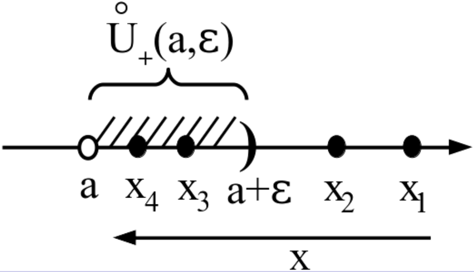
1. Одностороннее стремление

$x \to a \pm 0$, $a \in R$, если

$\forall \overset{\circ}{U}_{\pm}(a, \varepsilon)\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n \in \overset{\circ}{U}_{\pm}(a, \varepsilon)$

Примеры:

а) стремление справа - $x \to a + 0$, $n(\varepsilon) = 2$



Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление

$x \to a \pm 0, a \in R$, если

$\forall \overset{\circ}{U}_{\pm}(a, \varepsilon)\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n \in \overset{\circ}{U}_{\pm}(a, \varepsilon)$

Примеры:

б) стремление слева

Типы стремления переменной к точке

1. Одностороннее стремление

$x \to a \pm 0, a \in R$, если

$\forall \overset{\circ}{U}_{\pm}(a, \varepsilon)\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n \in \overset{\circ}{U}_{\pm}(a, \varepsilon)$

Примеры:

б) стремление слева - $x \to a - 0$, $n(\varepsilon) = 2$

Типы стремления переменной к точке

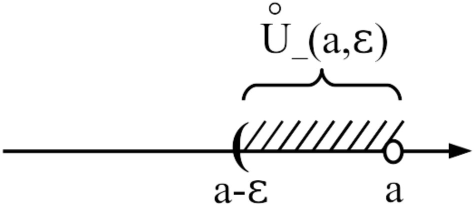
1. Одностороннее стремление

$x \to a \pm 0, a \in R$, если

$\forall \overset{\circ}{U}_{\pm}(a, \varepsilon)\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n \in \overset{\circ}{U}_{\pm}(a, \varepsilon)$

Примеры:

б) стремление слева - $x \to a - 0$, $n(\varepsilon) = 2$



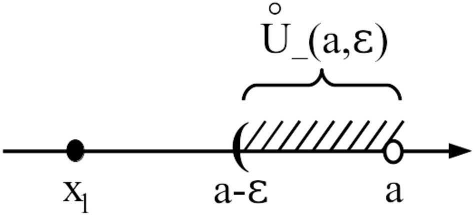
1. Одностороннее стремление

$x \to a \pm 0, a \in R$, если

$\forall \overset{\circ}{U}_{\pm}(a, \varepsilon)\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n \in \overset{\circ}{U}_{\pm}(a, \varepsilon)$

Примеры:

б) стремление слева - $x \to a - 0$, $n(\varepsilon) = 2$



Типы стремления переменной к точке

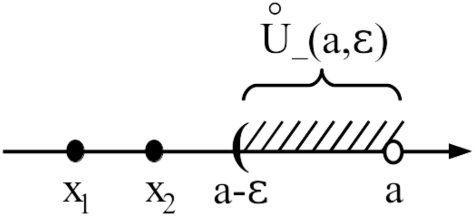
1. Одностороннее стремление

$x \to a \pm 0$, $a \in R$, если

$\forall \overset{\circ}{U}_{\pm}(a, \varepsilon)\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n \in \overset{\circ}{U}_{\pm}(a, \varepsilon)$

Примеры:

б) стремление слева - $x \to a - 0$, $n(\varepsilon) = 2$



Типы стремления переменной к точке

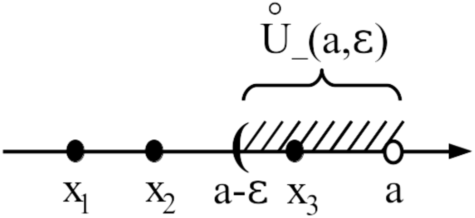
1. Одностороннее стремление

$x \to a \pm 0, a \in R$, если

$\forall\ \mathring{U}_\pm\ (a, \varepsilon)\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n \in \mathring{U}_\pm\ (a, \varepsilon)$

Примеры:

б) стремление слева - $x \to a - 0$, $n(\varepsilon) = 2$



Типы стремления переменной к точке

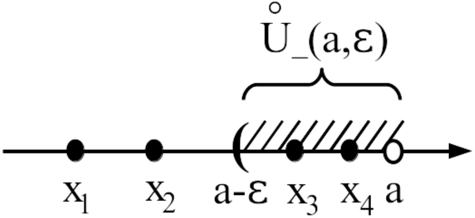
1. Одностороннее стремление

$x \to a \pm 0, a \in R$, если

$\forall \overset{\circ}{U}_{\pm}(a, \varepsilon)\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon x_n \in \overset{\circ}{U}_{\pm}(a, \varepsilon)$

Примеры:

б) стремление слева - $x \to a - 0$, $n(\varepsilon) = 2$



Типы стремления переменной к точке

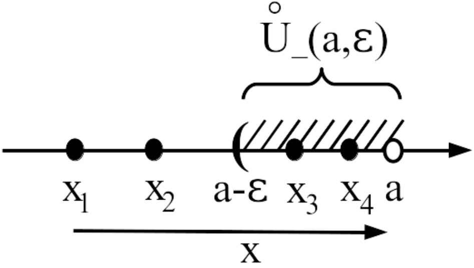
1. Одностороннее стремление

$x \to a \pm 0$, $a \in R$, если

$\forall \overset{\circ}{U}_{\pm}(a, \varepsilon)\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n \in \overset{\circ}{U}_{\pm}(a, \varepsilon)$

Примеры:

б) стремление слева - $x \to a - 0$, $n(\varepsilon) = 2$



2. Двустороннее стремление

Типы стремления переменной к точке

2. Двустороннее стремление

$x \to a$, $a \in \overline{R}$, если

Типы стремления переменной к точке

2. Двустороннее стремление

$x \to a$, $a \in \overline{R}$, если

$\forall \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon)\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon)$

2. Двустороннее стремление

$x \to a, a \in \overline{R}$, если

$\forall \overset{\circ}{U}(a,\varepsilon)\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n \in \overset{\circ}{U}(a,\varepsilon)$

Пример:

Типы стремления переменной к точке

2. Двустороннее стремление

$x \to a, a \in \overline{R}$, если

$\forall \overset{\circ}{U}(a,\varepsilon)\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n \in \overset{\circ}{U}(a,\varepsilon)$

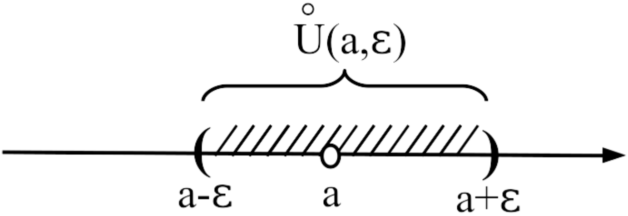
Пример: $x \to a$, $n(\varepsilon) = 2$

2. Двустороннее стремление

$x \to a$, $a \in \overline{R}$, если

$\forall \overset{\circ}{U}(a,\varepsilon)\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n \in \overset{\circ}{U}(a,\varepsilon)$

Пример: $x \to a$, $n(\varepsilon) = 2$



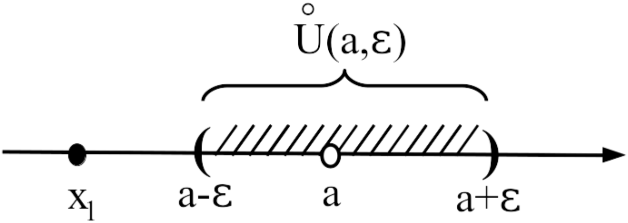
Типы стремления переменной к точке

2. Двустороннее стремление

$x \to a, a \in \overline{R}$, если

$\forall \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon)\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon)$

Пример: $x \to a,\ n(\varepsilon) = 2$



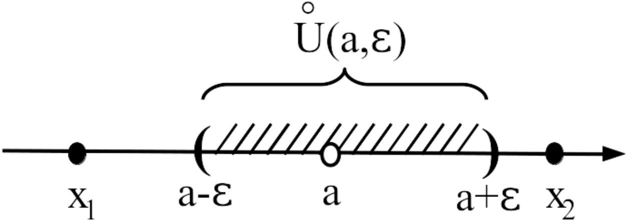
Типы стремления переменной к точке

2. Двустороннее стремление

$x \to a$, $a \in \overline{R}$, если

$\forall \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon)\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon)$

Пример: $x \to a$, $n(\varepsilon) = 2$

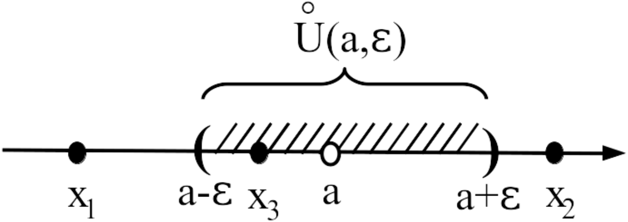


2. Двустороннее стремление

$x \to a$, $a \in \overline{R}$, если

$\forall \overset{\circ}{U}(a,\varepsilon)\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n \in \overset{\circ}{U}(a,\varepsilon)$

Пример: $x \to a$, $n(\varepsilon) = 2$

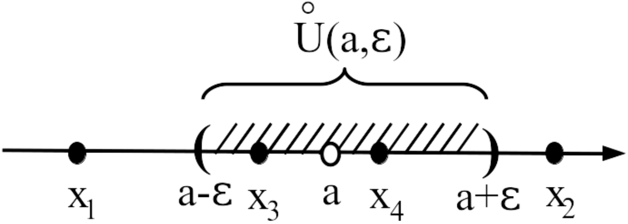


2. Двустороннее стремление

$x \to a$, $a \in \overline{R}$, если

$\forall \overset{\circ}{U}(a,\varepsilon)\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n \in \overset{\circ}{U}(a,\varepsilon)$

Пример: $x \to a$, $n(\varepsilon) = 2$

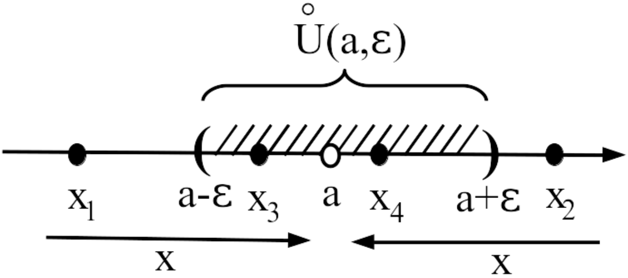


2. Двустороннее стремление

$x \to a,\, a \in \overline{R}$, если

$\forall \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon)\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon)$

Пример: $x \to a,\ n(\varepsilon) = 2$



Предел функции

Предел функции

Сначала сформулируем общее определение предела функции в терминах окрестностей и далее приведем несколько частных формулировок этого определения в терминах неравенств.

Предел функции

Определение

Точка b называется **пределом** функции $f(x)$ при $x \to a$, если $\forall U(b,\varepsilon)\ \exists \overset{\circ}{U}(a,\delta)\ \forall x \in \overset{\circ}{U}(a,\delta)$: $f(x) \in U(b,\varepsilon)$.

Расшифровка математических символов:

Предел функции

Расшифровка математических символов:
$\forall U(b, \varepsilon)$ - для любой ε-окрестности точки b

Расшифровка математических символов:
$\forall U(b, \varepsilon)$ - для любой ε-окрестности точки b
$\exists \overset{\circ}{U}(a, \delta)$ - существует такая проколотая δ-окрестность точки a, что

Предел функции

Расшифровка математических символов:

$\forall U(b,\varepsilon)$ - для любой ε-окрестности точки b

$\exists \overset{\circ}{U}(a,\delta)$ - существует такая проколотая δ-окрестность точки a, что

$\forall x \in \overset{\circ}{U}(a,\delta)$ - для любой точки x из этой окрестности

Предел функции

Расшифровка математических символов:

$\forall U(b,\varepsilon)$ - для любой ε-окрестности точки b

$\exists \overset{\circ}{U}(a,\delta)$ - существует такая проколотая δ-окрестность точки a, что

$\forall x \in \overset{\circ}{U}(a,\delta)$ - для любой точки x из этой окрестности

: - выполняется

Предел функции

Расшифровка математических символов:

$\forall U(b,\varepsilon)$ - для любой ε-окрестности точки b

$\exists \overset{\circ}{U}(a,\delta)$ - существует такая проколотая δ-окрестность точки a, что

$\forall x \in \overset{\circ}{U}(a,\delta)$ - для любой точки x из этой окрестности

: - выполняется

$f(x) \in U(b,\varepsilon)$ - значение функции f в точке x принадлежит ε-окрестности точки b

Предел функции

В данном определении точки a и b могут быть конечными числами или бесконечностями.

Если a - конечное число, то предел также часто называют двусторонним пределом.

Предел функции

В данном определении точки a и b могут быть конечными числами или бесконечностями. Если a - конечное число, то предел также часто называют двусторонним пределом.

Обозначение: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Частные случаи в терминах неравенств

Предел функции

Частные случаи в терминах неравенств

1) a, b - конечные числа

Предел функции

Частные случаи в терминах неравенств

1) a, b - конечные числа

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, если

Частные случаи в терминах неравенств

1) a, b - конечные числа

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, если

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) > 0 \; \forall x \in R, 0 < |x - a| < \delta$:

$|f(x) - b| < \varepsilon$

Расшифровка математических символов:

Расшифровка математических символов:

$\forall \varepsilon > 0$ - для любого положительного ε

Предел функции

Расшифровка математических символов:

$\forall \varepsilon > 0$ - для любого положительного ε

$\exists \delta(\varepsilon) > 0$ - существует такое положительное δ, зависящее от ε, что

Предел функции

Расшифровка математических символов:

$\forall \varepsilon > 0$ - для любого положительного ε

$\exists \delta(\varepsilon) > 0$ - существует такое положительное δ, зависящее от ε, что

$\forall x \in R$ - для любого дейст. числа x

Расшифровка математических символов:

$\forall \varepsilon > 0$ - для любого положительного ε

$\exists \delta(\varepsilon) > 0$ - существует такое положительное δ, зависящее от ε, что

$\forall x \in R$ - для любого дейст. числа x

, - удовлетворяющего условию

Предел функции

Расшифровка математических символов:

$\forall \varepsilon > 0$ - для любого положительного ε

$\exists \delta(\varepsilon) > 0$ - существует такое положительное δ, зависящее от ε, что

$\forall x \in R$ - для любого дейст. числа x

, - удовлетворяющего условию

$0 < |x - a| < \delta$ - $|x - a|$ больше нуля и меньше δ

Предел функции

Расшифровка математических символов:

$\forall\varepsilon > 0$ - для любого положительного ε

$\exists\delta(\varepsilon) > 0$ - существует такое положительное δ, зависящее от ε, что

$\forall x \in R$ - для любого дейст. числа x

, - удовлетворяющего условию

$0 < |x - a| < \delta$ - $|x - a|$ больше нуля и меньше δ

: - выполняется

Предел функции

Расшифровка математических символов:

$\forall \varepsilon > 0$ - для любого положительного ε

$\exists \delta(\varepsilon) > 0$ - существует такое положительное δ, зависящее от ε, что

$\forall x \in R$ - для любого дейст. числа x

, - удовлетворяющего условию

$0 < |x - a| < \delta$ - $|x - a|$ больше нуля и меньше δ

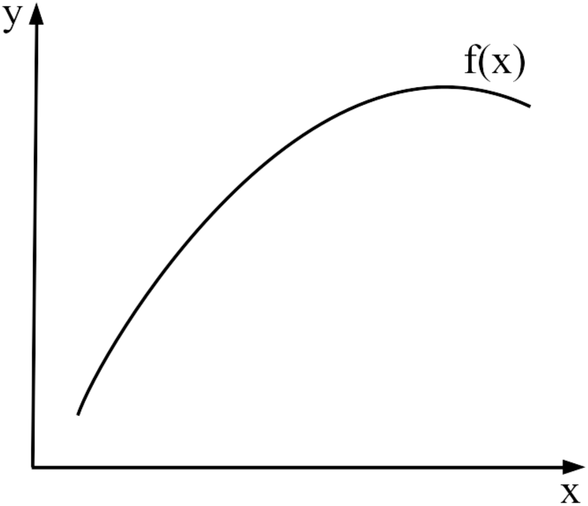
: - выполняется

$|f(x) - b| < \varepsilon$ - $|f(x) - b|$ меньше ε

Предел функции

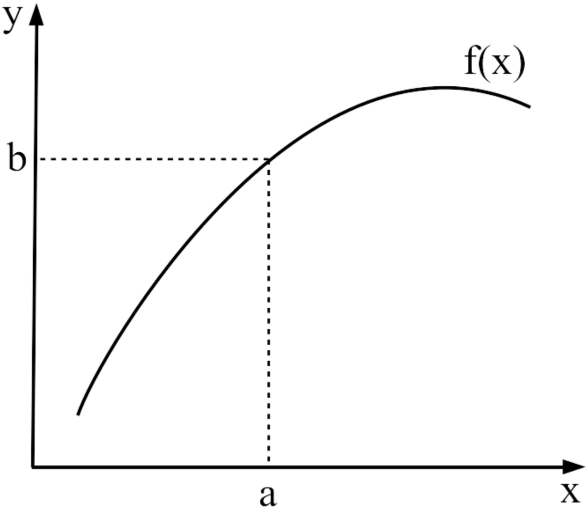
Геометрическая интерпретация:

Геометрическая интерпретация:

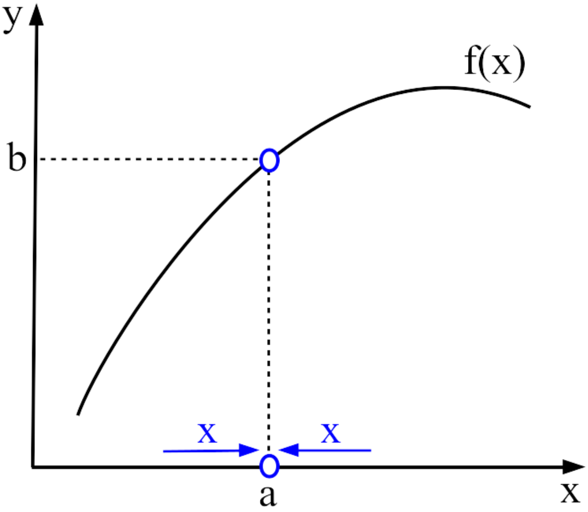


Предел функции

Геометрическая интерпретация:

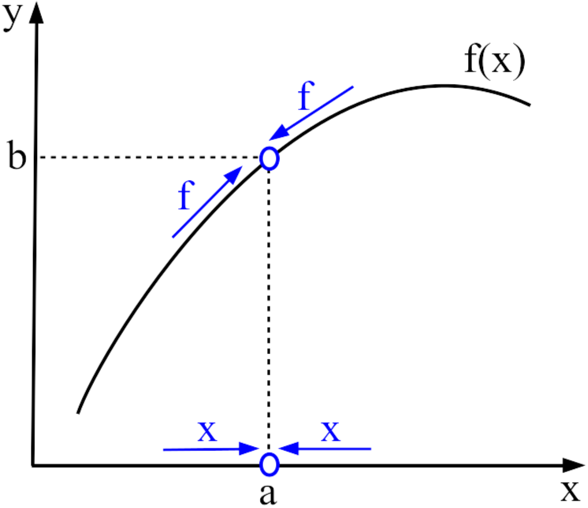


Геометрическая интерпретация:



Предел функции

Геометрическая интерпретация:



Предел функции

2) a - конечное число, $b = +\infty$

Предел функции

2) a - конечное число, $b = +\infty$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, если

Предел функции

2) a - конечное число, $b = +\infty$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, если

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x \in R, 0 < |x - a| < \delta$:

$f(x) > \varepsilon$

2) a - конечное число, $b = +\infty$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, если

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in R, 0 < |x - a| < \delta$:

$f(x) > \varepsilon$

3) a - конечное число, $b = \infty$

Предел функции

2) a - конечное число, $b = +\infty$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, если

$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in R, 0 < |x - a| < \delta$:

$f(x) > \varepsilon$

3) a - конечное число, $b = \infty$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, если

2) a - конечное число, $b = +\infty$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, если

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in R, 0 < |x - a| < \delta$:

$f(x) > \varepsilon$

3) a - конечное число, $b = \infty$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, если

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in R, 0 < |x - a| < \delta$:

$|f(x)| > \varepsilon$

Предел функции

4) $a = -\infty$, b - конечное число

Предел функции

4) $a = -\infty$, b - конечное число

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$, если

4) $a = -\infty$, b - конечное число

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$, если

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in R, x < -\delta$:

$|f(x) - b| < \varepsilon$

Арифметические свойства пределов

Арифметические свойства пределов

Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, причем b и c - конечные числа, то

Предел функции

Арифметические свойства пределов

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, причем b и c - конечные числа, то

1) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = b \pm c$

Арифметические свойства пределов

Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, причем b и c - конечные числа, то

1) $\lim\limits_{x \to a}(f(x) \pm g(x)) = b \pm c$

2) $\lim\limits_{x \to a}(f(x) \cdot g(x)) = b \cdot c$

Арифметические свойства пределов

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, причем b и c - конечные числа, то

1) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = b \pm c$

2) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = b \cdot c$

3) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)/g(x)) = b/c$, если $c \neq 0$

Односторонние пределы

Определение

Точка b называется **пределом** функции $f(x)$ **слева** при $x \to a$, если $\forall U(b,\varepsilon)\ \exists \overset{\circ}{U}_-(a,\delta)$ $\forall x \in \overset{\circ}{U}_-(a,\delta)$: $f(x) \in U(b,\varepsilon)$

Определение

Точка b называется **пределом** функции $f(x)$ **слева** при $x \to a$, если $\forall U(b,\varepsilon)\ \exists\ \overset{\circ}{U}_-(a,\delta)$ $\forall x \in \overset{\circ}{U}_-(a,\delta)$: $f(x) \in U(b,\varepsilon)$

Обозначение: $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = b$.

Определение

Точка b называется **пределом** функции $f(x)$ **справа** при $x \to a$, если $\forall U(b,\varepsilon)\ \exists\ \overset{\circ}{U}_{+}(a,\delta)$ $\forall x \in \overset{\circ}{U}_{+}(a,\delta)$: $f(x) \in U(b,\varepsilon)$

Определение

Точка b называется **пределом** функции $f(x)$ **справа** при $x \to a$, если $\forall U(b,\varepsilon)\ \exists\ \overset{\circ}{U}_{+}(a,\delta)$ $\forall x \in \overset{\circ}{U}_{+}(a,\delta)$: $f(x) \in U(b,\varepsilon)$

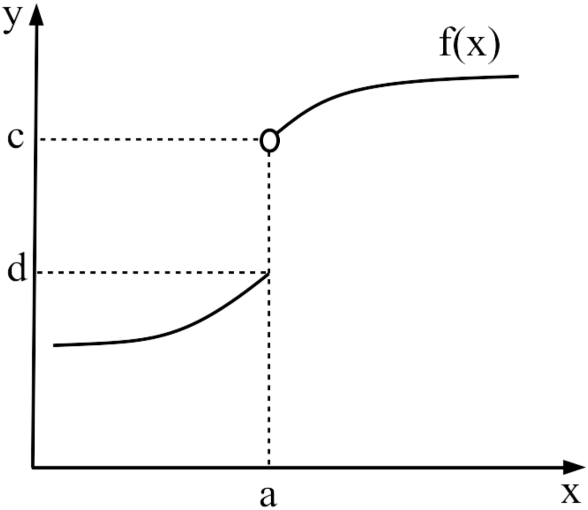
Обозначение: $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = b$.

Односторонние пределы

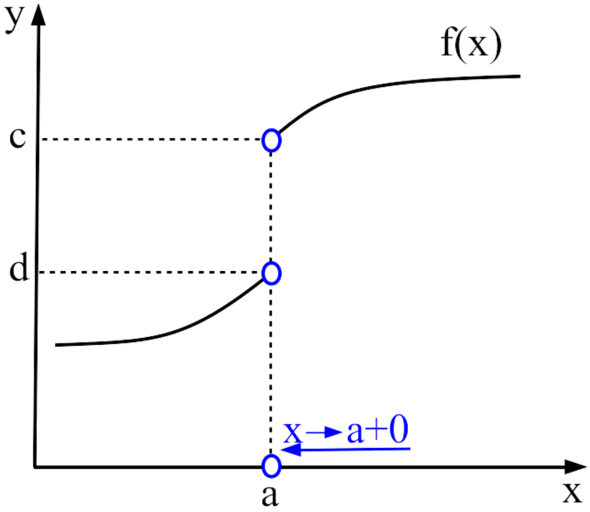
Геометрическая интерпретация:

Односторонние пределы

Геометрическая интерпретация:

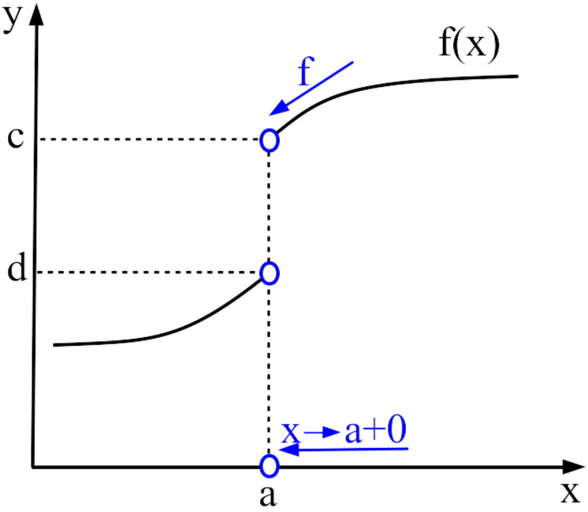


Геометрическая интерпретация:

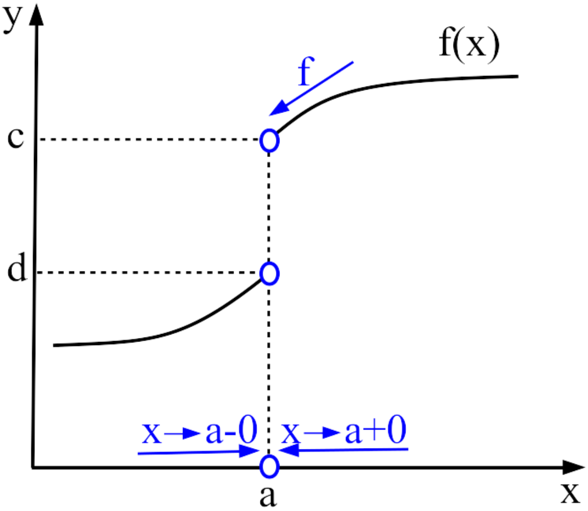


Односторонние пределы

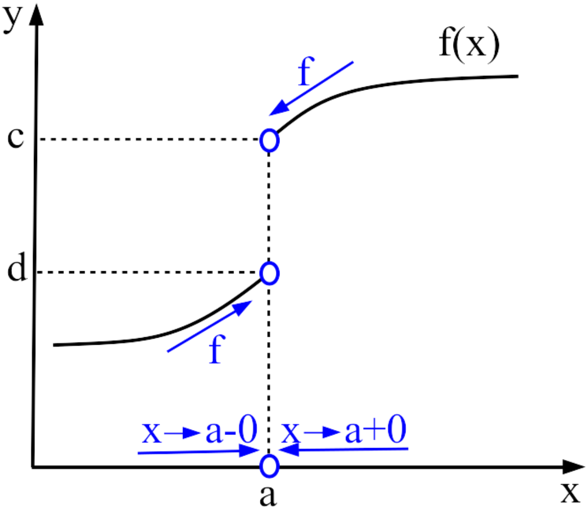
Геометрическая интерпретация:



Геометрическая интерпретация:

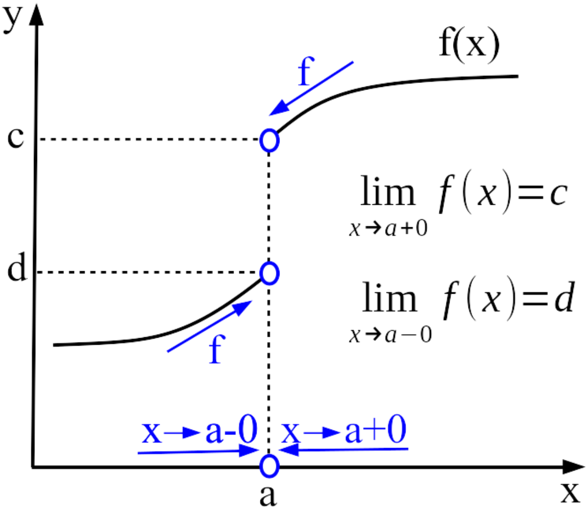


Геометрическая интерпретация:



Односторонние пределы

Геометрическая интерпретация:



Односторонние пределы

Теорема (о связи односторонних пределов с двусторонним)

Односторонние пределы

Теорема (о связи односторонних пределов с двусторонним)
Функция $f(x)$ имеет в точке a двусторонний предел тогда и только тогда, когда в этой точке существуют односторонние пределы и они равны, причем их общее значение является значением двустороннего предела.