

# Математический анализ

## Модуль 2. Пределы и непрерывность функций одной переменной

### Лекция 2.5

#### Аннотация

Свойства функций, непрерывных в точке (продолжение). Непрерывность функции на промежутке. Наклонные и вертикальные асимптоты графика функции.

## 1 Свойства функций, непрерывных в точке

*Теорема (локальная ограниченность непрерывной функции)\**

Если  $f(x) \in C(a)$ , то существует такая окрестность точки  $a$ , в которой функция  $f(x)$  ограничена.

*Доказательство*

$f(x) \in C(a) \Rightarrow$  по эквивалентному определению непрерывности функции имеем

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in R, |x - a| < \delta: |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

$$\text{Пусть } \varepsilon = 1. \text{ Тогда } \forall x \in R, |x - a| < \delta: |f(x) - f(a)| < 1.$$

$$\Rightarrow -1 < f(x) - f(a) < 1, f(a) - 1 < f(x) < f(a) + 1.$$

$$\Rightarrow \exists U(a), \text{ в которой функция ограничена. } \blacksquare$$

*Теорема (локальное знакопостоянство непрерывной функции)\**

Если  $f(x) \in C(a)$  и  $f(a) \neq 0$ , то в некоторой окрестности точки  $a$  функция сохраняет свой знак.

*Доказательство*

Рассмотрим случай  $f(a) > 0$ .

$f(x) \in C(a) \Rightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in R, |x - a| < \delta: |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$

Пусть  $\varepsilon = f(a)$ . Тогда  $\forall x \in R, |x - a| < \delta: |f(x) - f(a)| < f(a)$ .

$\Rightarrow -f(a) < f(x) - f(a) < f(a), 0 < f(x) < 2f(a).$

$\Rightarrow \exists U(a)$ , в которой  $f(x) > 0$ , т.е. функция сохраняет свой знак.

Аналогично доказывается для  $f(a) < 0$ . ■

## 2 Непрерывность функции на промежутке

*Определение*

Функция, определенная на отрезке  $[a, b]$  и непрерывная в каждой его точке, называется **непрерывной на этом отрезке**.

Обозначение:  $f(x) \in C[a, b]$

*Теорема (теорема Вейерштрасса)*

Всякая непрерывная на отрезке функция ограничена на этом отрезке и достигает на нем своих точной верхней и точной нижней граней.

Математическая формулировка теоремы:

$f(x) \in C[a, b] \Rightarrow \exists x', x'' \in [a, b]: \sup_{[a, b]} f(x) = f(x'), \inf_{[a, b]} f(x) = f(x'')$

и  $\forall x \in [a, b]: f(x'') \leq f(x) \leq f(x')$ .

*Теорема (теорема Больцано-Коши о промежуточном значении непрерывной функции)*

Если  $f(x) \in C[a, b]$ ,  $f(a) = A$ ,  $f(b) = B$ , то  $\forall C, A < C < B$   
 $\exists c \in [a, b]: f(c) = C$ .

*Теорема (о непрерывности обратной функции)*

Пусть функция  $f(x)$  определена, строго возрастает (убывает) и непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , тогда обратная функция  $f^{-1}$  определена, однозначна, строго возрастает (убывает) и непрерывна на отрезке с концами в точках  $f(a)$  и  $f(b)$ .

### 3 Асимптоты графика функции

*Определение*

Пусть функция  $f(x)$  определена для всех  $x > a$  (или  $x < a$ ). Если существуют такие числа  $k$  и  $b$ , что функция  $f(x) - (kx + b)$  является бесконечно малой при  $x \rightarrow +\infty$  (или  $x \rightarrow -\infty$ ), то прямая  $y = kx + b$  называется **наклонной асимптотой** графика функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$  (или  $x \rightarrow -\infty$ ).

Графически асимптота является прямой, расстояние до которой от графика функции стремится к нулю.

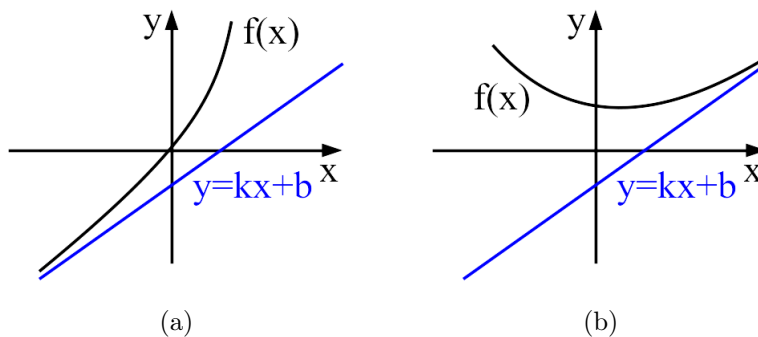


Рис. 1: Левая (а) и правая (б) наклонные асимптоты

Коэффициенты наклонных асимптот находятся по формулам:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x},$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx).$$

Если хотя бы один из коэффициентов  $k$  и  $b$  равен бесконечности, то функция не имеет соответствующей наклонной асимптоты.

*Определение*

Пусть функция  $f(x)$  определена в некоторой проколотой окрестности точки  $a$ , и пусть выполняется хотя бы одно из условий

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty.$$

Тогда прямая  $x = a$  называется **вертикальной асимптотой** графика функции  $f(x)$ .

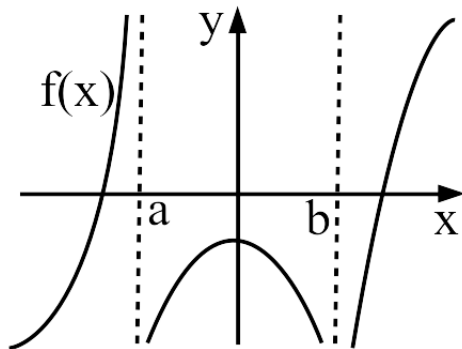


Рис. 2: Вертикальные асимптоты  $x = a$  и  $x = b$