Математический анализ
Модуль 2. Пределы и непрерывность функций одной переменной
Лекция 2.3

Аннотация

Сравнение функций. О-большое и о-малое. Эквивалентные функции и их применение к вычислению предела. Таблица эквивалентных бесконечно малых функций.

1 Сравнение функций

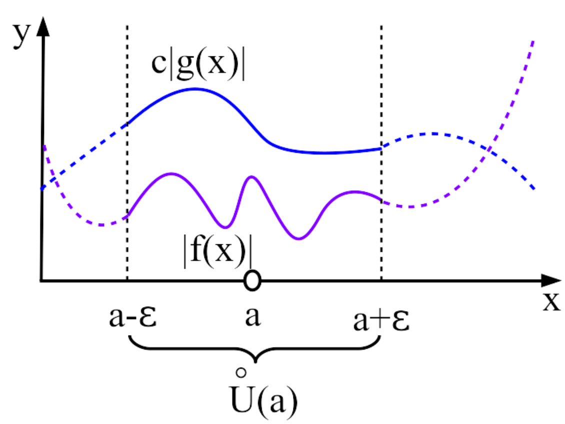
Пусть $\overset{\circ}{U}(a)$ - некоторая проколотая окрестность точки a.

Определение

Функция $f(x)$ называется **ограниченной по сравнению** с функцией $g(x)$ в $\overset{\circ}{U}(a)$, если $\exists c > 0\ \forall x \in \overset{\circ}{U}(a)$: $|f(x)| \leq c \cdot |g(x)|$.

Обозначение: $f(x) = O(g(x)), x \to a$. Произношение: f - это "O"-большое от g.

Пример:



Определение

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что $f(x) = O(g(x))$ и $g(x) = O(f(x))$ при $x \to a$, то они называются **функциями одного порядка** при $x \to a$.

Обозначение: $f(x) \asymp g(x), x \to a$.

Определение

Пусть $f(x) \neq 0$ и $g(x) \neq 0$ $\forall x \in \overset{\circ}{U}(a)$. Тогда функции $f(x)$ и $g(x)$ называются **эквивалентными** при $x \to a$, если

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Обозначение: $f(x) \sim g(x), x \to a$.

Свойства эквивалентных функций

1) если $f \sim g, x \to a$, то $g \sim f, x \to a$
2) если $f \sim g, g \sim h, x \to a$, то $f \sim h, x \to a$

Определение

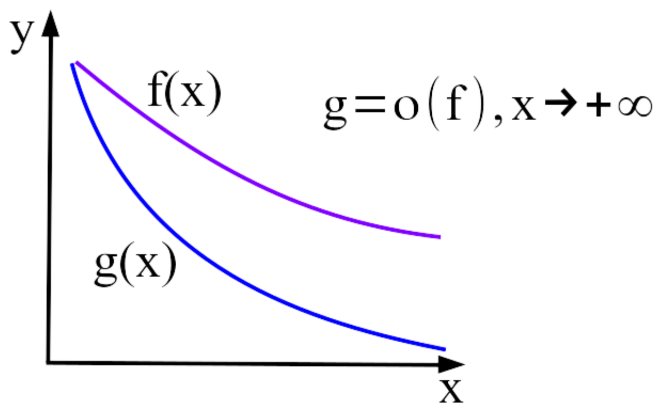
Пусть $f(x) \neq 0$ $\forall x \in \overset{\circ}{U}(a)$. Тогда функция $g(x)$ называется **бесконечно малой по сравнению** с функцией $f(x)$ при $x \to a$, если

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0.$$

Обозначение: $g(x) = \circ(f(x)), x \to a$. Произношение: g - это “o”-малое от f при $x \to a$.

Если $f(x)$ является бесконечно малой функцией при $x \to a$, то говорят, что $g(x)$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем $f(x)$.

Пример:



Здесь обе функции f и g стремятся к нулю при $x \to +\infty$, только функция g убывает быстрее, чем функция f.

Свойства “o”-малое

1) $\circ(f) + \circ(f) = \circ(f)$
2) $\circ(cf) = \circ(f), c \neq 0$
3) $c \cdot \circ(f) = \circ(f), c \neq 0$
4) $\circ(\circ(f)) = \circ(f)$
5) $\circ(f + \circ(f)) = \circ(f)$
6) $\circ(f^n) \cdot \circ(f^m) = \circ(f^{n+m})$
7) $(\circ(f))^n = \circ(f^n)$

*Теорема (о связи эквивалентности и “o”-малое)**

Для того чтобы функции $f(x)$ и $g(x)$ были эквивалентны при $x \to a$, необходимо и достаточно, чтобы при $x \to a$ выполнялось условие

$$f(x) = g(x) + \circ(g(x)).$$

Доказательство

1) необходимость

Дано: $f(x) \sim g(x), x \to a$.

Доказать: $f(x) = g(x) + \circ(g(x)), x \to a$.

Введем функцию $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Так как $f(x) \sim g(x), x \to a$, то $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

$f(x) - g(x) = \varphi(x)g(x) - g(x) = (\varphi(x) - 1)g(x)$.

$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - g(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{(\varphi(x) - 1)g(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}(\varphi(x) - 1) = 1 - 1 = 0$.

$\Rightarrow f(x) - g(x) = \circ(g(x)), x \to a$.

$\Rightarrow f(x) = g(x) + \circ(g(x)), x \to a$.

2) достаточность

Дано: $f(x) = g(x) + \circ(g(x)), x \to a$.

Доказать: $f(x) \sim g(x), x \to a$.

$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x) + \circ(g(x))}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}(1 + \dfrac{\circ(g(x))}{g(x)}) = 1 + \lim\limits_{x\to a} \dfrac{\circ(g(x))}{g(x)} =$
$= 1 + 0 = 1. \Rightarrow f(x) \sim g(x), x \to a.$ ■

*Теорема (о пределах эквивалентных функций)**

Пусть $f(x) \sim f_1(x)$ и $g(x) \sim g_1(x)$ при $x \to a$. Тогда если существует

$$\lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)},$$

то существует и

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)},$$

причем

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}.$$

Доказательство

$$\lim_{x\to a}\frac{f}{g}=\lim_{x\to a}\frac{f\cdot f_1\cdot g_1}{f_1\cdot g_1\cdot g}=\lim_{x\to a}\frac{f}{f_1}\cdot\lim_{x\to a}\frac{f_1}{g_1}\cdot\lim_{x\to a}\frac{g_1}{g}=\lim_{x\to a}\frac{f_1}{g_1}.\ \blacksquare$$

Для применения этой теоремы необходимо знать таблицу эквивалентных функций.

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций

1) $\sin x\sim x, x\to 0$
2) $\operatorname{tg} x\sim x, x\to 0$
3) $\arcsin x\sim x, x\to 0$
4) $\operatorname{arctg} x\sim x, x\to 0$
5) $1-\cos x\sim x^2/2, x\to 0$
6) $\ln(1+x)\sim x, x\to 0$
7) $e^x-1\sim x, x\to 0$
8) $a^x-1\sim x\ln a, x\to 0$
9) $(1+x)^m-1\sim mx, x\to 0$

Используя теорему о замене переменной можно показать, что в данной таблице отношение эквивалентности сохранится, если переменную x заменить на какую-либо функцию u.

Примеры:
1) $\sin u\sim u, u\to 0$
2) $\operatorname{tg} u\sim u, u\to 0$
3) $e^u-1\sim u, u\to 0$

Здесь $u=u(x)$ - некоторая функция, которая должна стремиться к нулю: $u\to 0$.

Определение

Функция $f(x)$ называется **бесконечно малой порядка r относительно** функции $g(x)$, если существует не равный нулю конечный предел

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{(g(x))^r}.$$

Определение

Если функция $f(x)$ представима в виде $f(x) = g(x) + \circ(g(x)), x \to a$, то функция $g(x)$ называется **главной частью** функции $f(x)$.

Теорема

Если функция $f(x)$ обладает при $x \to a$ главной частью вида $A(x-a)^k$, где A и k - постоянные числа, то среди всех главных частей такого вида она определяется единственным образом.