Интегралы и дифференциальные уравнения

Модуль 2. Определенный интеграл, несобственные интегралы

Лекция 2.2

Аннотация

Определенный интеграл с переменным верхним пределом и теорема о его производной. Формула Ньютона-Лейбница. Вычисление определенных интегралов подстановкой и по частям. Интегрирование периодических функций, интегрирование четных и нечетных функций на отрезке, симметричном относительно начала координат.

Интеграл с переменным верхним пределом.

Если один из пределов определенного интеграла – переменная величина, то такой интеграл является функцией этой переменной. Например, если a – число, x – переменная, то интеграл $\int\limits_a^x f(t)dt$ представляет собой функцию, зависящую от x. Эта функция обладает следующими свойствами:

1. Если функция f – интегрируема на отрезке $[a;b]$, то функция $F(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$ непрерывна на том же отрезке.

2. Если функция f – непрерывна на отрезке $[a;b]$, то функция $F(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$ дифференцируема на том же отрезке и
$$F'(x)=f(x)\,,$$
то есть **производная от интеграла $\int\limits_a^x f(t)dt$ по переменному верхнему пределу равна значению подынтегральной функции на этом пределе**. Отсюда следует, что интеграл $\int\limits_a^x f(t)dt$ является одной из первообразных функции f.

Все сказанное выше справедливо и для интеграла с переменным нижним пределом, например, $\int\limits_x^b f(t)dt$. Разница состоит только в том, что при дифференцировании такого интеграла мы получим подынтегральную функцию со знаком минус:

$$\boxed{\left(\int\limits_x^b f(t)dt\right)'=-f(x)} \qquad (2.2.1)$$

Формула Ньютона-Лейбница.

Известно, что любые две первообразные функции f отличатся друг от друга только на константу (число). Интеграл $\int\limits_a^x f(t)dt$ является *одной из* первообразных функции f; тогда произвольную первообразную этой функции можно найти по формуле:

$$\boxed{F(x)=\int\limits_a^x f(t)dt+C,\quad C=\mathrm{const}} \qquad (2.2.2)$$

Вычислим значения первообразной $F(x)$ в точках $x = a$ и $x = b$:

$$F(a) = \int\limits_a^a f(t)dt + C = C, \quad F(b) = \int\limits_a^b f(t)dt + C \tag{2.2.3}$$

Мы воспользовались тем, что, согласно свойствам определенного интеграла, $\int\limits_a^a f(t)dt = 0$. Из (2.2.3) следует **формула Ньютона-Лейбница**:

$$\boxed{\int\limits_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)} \tag{2.2.4}$$

Формула Ньютона-Лейбница говорит о том, что для вычисления определенного интеграла функции f нужно составить разность значений любой из ее первообразных на вернем и нижнем пределах интеграла. Формулу (2.2.4) часто записывают в более короткой форме:

$$\boxed{\int\limits_a^b f(t)dt = F(x)\Big|_a^b} \tag{2.2.5}$$

Примеры

1. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx = \sin(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = 1 - 0 = 1$

2. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln|x + \sqrt{x^2-1}|\Big|_1^2 = \ln|2+\sqrt{3}| - \underbrace{\ln|1|}_{=0} = \ln|2+\sqrt{3}|$

3. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{3}\right)\Big|_0^2 = \arcsin\left(\frac{2}{3}\right) - \arcsin\left(\frac{0}{3}\right) = \arcsin\left(\frac{2}{3}\right)$

Для вычисления интегралов в рассмотренных примерах мы использовали таблицу элементарных интегралов.

Интегрирование с помощью замены переменных.

Пусть $f(y)$ – некоторая функция, зависящая от y, $y(x)$ – некоторая функция, зависящая от x; функцию $f(y(x))$ называют композицией функций f и y (по-другому такую функцию называют *сложной* функцией). Предположим, что подынтегральная функция представляет собой произведение $f(y(x)) \cdot y'(x)$ и $y(a) = A$, $y(b) = B$. В этом случае для упрощения процесса интегрирования можно сделать замену переменных:

$$\boxed{\int\limits_a^b f(\overbrace{y(x)}^{t}) \cdot \underbrace{y'(x)dx}_{dt} = \left| \begin{array}{c} t = y(x) \Rightarrow dt = y'(x)dx \\ x = a \Rightarrow t = A; \; x = b \Rightarrow t = B \end{array} \right| = \int\limits_A^B f(t)dt} \tag{2.2.6}$$

Примеры

1. $\int\limits_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}dx = \int\limits_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \sin\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x^2}dx = \left| \begin{array}{c} t=\frac{1}{x} \Rightarrow dt = -\frac{1}{x^2}dx \Rightarrow \frac{1}{x^2}dx = -dt \\ x=\frac{1}{\pi} \Rightarrow t=\pi;\; x=\frac{2}{\pi} \Rightarrow t=\frac{\pi}{2} \end{array} \right| = -\int\limits_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)dt =$

$= \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(t)dt = \left(-\cos(t)\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \left(-\cos(\pi)\right) - \left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = (-(-1)) - 0 = 1$

2. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(\varphi)d\varphi = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\varphi)\cdot\cos(\varphi)d\varphi = \left| \begin{array}{c} z=\sin(\varphi) \Rightarrow dz=\cos(\varphi)d\varphi \\ \cos^2(\varphi) = 1-\sin^2(\varphi) = 1-z^2 \\ \varphi=0 \Rightarrow z=0;\; \varphi=\frac{\pi}{2} \Rightarrow z=1 \end{array} \right| = \int\limits_{0}^{1}(1-z^2)dz =$

$= \left(z-\frac{z^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \left(1-\frac{1}{3}\right) - (0-0) = \frac{2}{3}$

3. $\int\limits_{1}^{5} \frac{xdx}{x^2+1} = \left| \begin{array}{c} u=x^2+1 \Rightarrow du=2xdx \Rightarrow xdx=\frac{1}{2}du \\ x=1 \Rightarrow u=2;\; x=5 \Rightarrow u=26 \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int\limits_{2}^{26}\frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u|\Big|_2^{26} = \frac{1}{2}\ln 26 - \frac{1}{2}\ln 2 =$

$= \frac{1}{2}\ln\frac{26}{2} = \frac{1}{2}\ln 13 = \ln\sqrt{13}$

Интегрирование по частям.

Пусть $f(x), g(x)$ – функции, для которых существуют производные. Согласно правилу Лейбница $(fg)' = f'g + g'f$; согласно свойству неопределенного интеграла и формуле Ньютона-Лейбница: $\int\limits_a^b (fg)'dx = fg\Big|_a^b$. Следовательно,

$$\int\limits_a^b (fg)'dx = \int\limits_a^b (f'g+g'f)dx = \int\limits_a^b f'gdx + \int\limits_a^b g'fdx = fg\Big|_a^b$$

Перенося второй интеграл в правую часть равенства с противоположным знаком, получим **формулу интегрирования по частям**:

$$\boxed{\int\limits_a^b f'gdx = fg\Big|_a^b - \int\limits_a^b g'fdx} \qquad (2.2.7)$$

Формула (2.2.7) нужна для того, чтобы вычисление интеграла $\int\limits_a^b f'gdx$ заменить на вычисление интеграла $\int\limits_a^b g'fdx$, так как бывают ситуации (для некоторых функций f и g), когда второй интеграл вычислить значительно легче, чем первый.

Примеры

1. $\int\limits_{-1}^{0} \overbrace{x}^{g} \underbrace{\mathrm{e}^{-x}}_{f'} dx = \Big(x(-\mathrm{e}^{-x})\Big)\Big|_{-1}^{0} - \int\limits_{-1}^{0} \overbrace{(x)'}^{g'} \underbrace{(-\mathrm{e}^{-x})}_{f} dx = -\mathrm{e} + \int\limits_{-1}^{0} \mathrm{e}^{-x}\,dx = -\mathrm{e} + (-\mathrm{e}^{-x})\Big|_{-1}^{0} =$
$= -\mathrm{e} + (-1 - (-\mathrm{e})) = \cancel{-\mathrm{e}} - 1 \cancel{+\mathrm{e}} = -1$

2. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} x \cdot \cos^2(x)dx = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} x \cdot \frac{1+\cos(2x)}{2} dx = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} x dx + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} x\cos(2x)dx =$
$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right) + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} x\cos(2x)dx = \frac{\pi^2}{64} + \frac{1}{2}\cdot\left(\left(x \cdot \frac{1}{2}\sin(2x)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\sin(2x)dx\right) =$
$= \frac{\pi^2}{64} + \frac{1}{2}\cdot\left(\left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right)\right)\right) = \frac{\pi^2}{64} + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi^2}{64} + \frac{\pi}{16} - \frac{1}{8}$

3. $\int\limits_{1}^{\mathrm{e}} \ln x dx = \int\limits_{1}^{\mathrm{e}} \overbrace{1}^{f'} \cdot \underbrace{\ln x}_{g} dx = \Big(x\ln x\Big)\Big|_1^{\mathrm{e}} - \int\limits_{1}^{\mathrm{e}} \overbrace{x}^{f} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'} dx = \mathrm{e}\ln\mathrm{e} - \int\limits_{1}^{\mathrm{e}} dx = \mathrm{e} - x\Big|_1^{\mathrm{e}} = \mathrm{e} - (\mathrm{e} - 1) =$
1

Интегрирование функций на промежутке, симметричном относительно начала координат.

Определение (симметричное множество)

Множество точек числовой прямой называется симметричным относительно начала координат (относительно нуля), если вместе с каждым числом x оно также содержит в себе и число $-x$.

Примеры

1. Отрезок $[-a; a]$, где a – любое положительное число, является симметричным относительно начала координат, так как какое бы число из это отрезка мы не взяли, всегда найдется противоположное ему по знаку число, которое тоже принадлежит этому отрезку.

2. Полуинтервалы $[-b; b)$ и $(-b; b]$, где b – любое положительное число, **НЕ** являются симметричными относительно начала координат, так как в первом случае число $-b$ принадлежит полуинтервалу, а число b – нет; во втором случае – наоборот.

3. $[-3; 3]$, $(-5; 5)$, $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$ – симметричные относительно начала координат множества.

4. $(-10; 10]$, $[-7; 7)$, $[-1; 9]$, $(-8; +\infty)$ – несимметричные относительно начала координат

множества.

Если по симметричному отрезку интегрируется четная или нечетная функция, то процесс интегрирования существенно упрощается.

Определение (четная функция)

Функция $f(x)$ называется четной на множестве X, если:

1. множество X симметрично относительно начала координат,
2. для любого $x \in X$ справедливо равенство: $f(-x) = f(x)$.

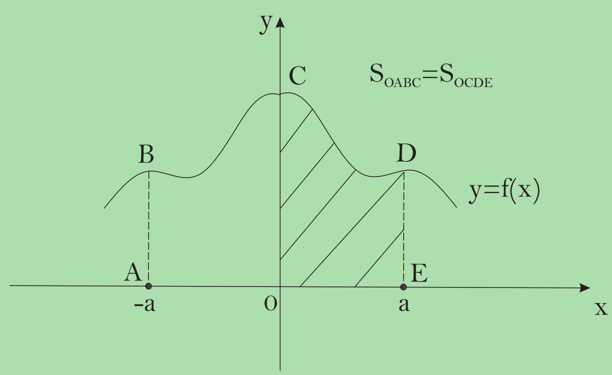

Рис. 1: График четной функции

Примеры

Четные функции: $f(x) = x^2$, $f(x) = \frac{x^4}{x^2+3}$, $f(x) = \cos(x)$, $f(x) = \sqrt{x^2-9}$, $f(x) = |\sin(x)|$

На рис. 1 представлен пример графика четной функции. Площадь под графиком равна определенному интегралу функции по соответствующему отрезку, поэтому площадь заштрихованной криволинейной трапеции равна $\int\limits_0^a f(x)dx$, площадь незаштрихованной равна $\int\limits_{-a}^0 f(x)dx$. Так как график четной функции всегда симметричен относительно оси ординат (оси y), площади заштрихованной и незаштрихованной трапеций равны:

$$S_{0ABC} = S_{0CDE} \Longrightarrow \int\limits_0^a f(x)dx = \int\limits_{-a}^0 f(x)dx$$

Следовательно,

$$\boxed{\int\limits_{-a}^a f(x)dx = \int\limits_{-a}^0 f(x)dx + \int\limits_0^a f(x)dx = 2\int\limits_0^a f(x)dx} \qquad (2.2.8)$$

Интеграл четной функции в симметричных пределах всегда равен удвоенному интегралу по половинному промежутку.

Примеры

1. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2\cdot\left(\arcsin(x)\Big|_0^1\right) = 2\cdot\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = \pi$

2. $\int\limits_{-2}^{2} x^4dx = 2\int\limits_{0}^{2} x^4dx = 2\cdot\left(\frac{x^5}{5}\Big|_0^2\right) = 2\cdot\left(\frac{32}{5}-0\right) = 12.8$

Определение (нечетная функция)

Функция $f(x)$ называется нечетной на множестве X, если:

1. множество X симметрично относительно начала координат,
2. для любого $x \in X$ справедливо равенство: $f(-x) = -f(x)$.

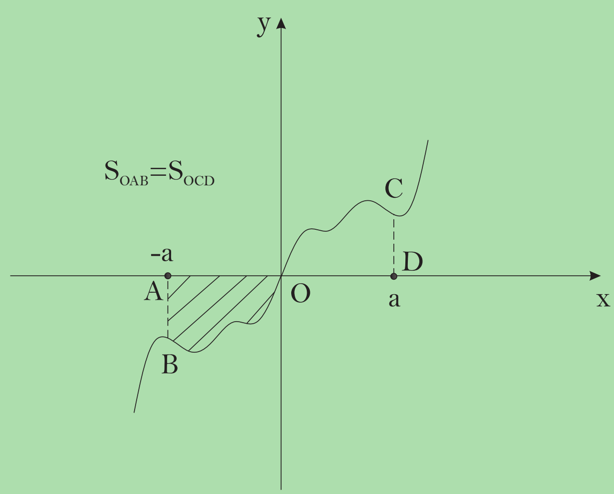

Рис. 2: График нечетной функции

Примеры

Нечетные функции: $f(x) = x^3$, $f(x) = \frac{x}{x^4+1}$, $f(x) = \sin(x)$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = \mathrm{arctg}(x)$

На рис. 2 представлен пример графика нечетной функции. Площадь незаштрихованной криволинейной трапеции равна $\int\limits_0^a f(x)dx$, площадь заштрихованной равна $-\int\limits_{-a}^{0} f(x)dx$. Так как график нечетной функции всегда симметричен относительно начала координат, площади заштрихованной и незаштрихованной трапеций равны:

$$S_{0AB} = S_{0CD} \Longrightarrow \int\limits_0^a f(x)dx = -\int\limits_{-a}^{0} f(x)dx$$

Следовательно,

$$\boxed{\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)dx - \int\limits_{-a}^{0} f(x)dx = 0} \qquad (2.2.9)$$

Интеграл нечетной функции в симметричных пределах всегда равен нулю.

Примеры

1. $\int\limits_{-10}^{10} \frac{x}{1+x^4}dx = 0$ **2.** $\int\limits_{-1}^{1} \arcsin(x)dx = 0$

Определение (периодическая функция)

Функция $f(x)$ называется периодической на множестве X, если существует такое число T, что

1. вместе с любым числом x множество X содержит в себе числа $x-T$ и $x+T$,

2. для любого $x \in X$ выполняется равенство: $f(x+T) = f(x)$.

Число T называется периодом функции. Наименьший положительный период (если он существует) называется основным.

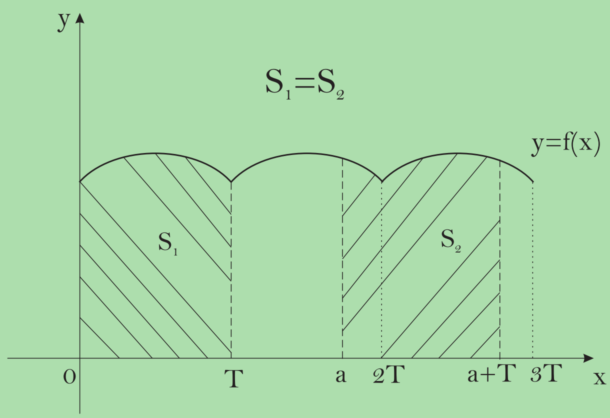

Рис. 3: График периодической функции

Примеры

1. Функции $\sin(x)$, $\cos(x)$ являются периодическими с основным периодом 2π.

2. Функции $\mathrm{tg}(x)$, $\mathrm{ctg}(x)$ являются периодическими с основным периодом π.

3. Любая постоянная функция $f(x) = \mathrm{const}$ является периодической; периодом является любое ненулевое число, основного периода функция не имеет.

4. Функция Дирихле $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ является периодической; периодом является любое ненулевое рациональное число, основного периода функция не имеет.

Если функция с периодом T интегрируема на некотором отрезке длины T, то она интегрируема и на любом другом отрезке той же длины, при этом для любого a выполняется равенство:

$$\boxed{\int\limits_{a}^{a+T} f(x)dx = \int\limits_{0}^{T} f(x)dx} \tag{2.2.10}$$

Геометрический смысл этого равенства проиллюстрирован на рис. 3: площади заштрихованных криволинейных трапеций равны.