

# Математический анализ

## Модуль 2. Пределы и непрерывность

### функций одной переменной

### Лекция 2.1

#### Аннотация

Окрестность точки. Типы стремления переменной к точке. Предел функции в терминах окрестностей и неравенств. Арифметические свойства пределов. Односторонние пределы.

## 1 Окрестность точки

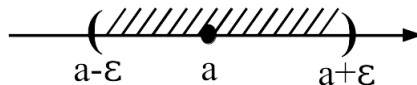
Под точкой понимается как действительное число, так и элементы  $+\infty$ ,  $-\infty$ ,  $\infty$ .

*Определение*

$\varepsilon$ -окрестность точки  $a$  обозначается как  $U(a, \varepsilon)$  и определяется по формулам:

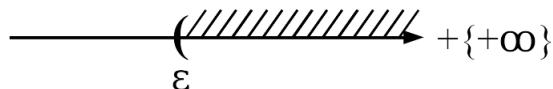
1)  $a$  - действительное число

$$U(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$



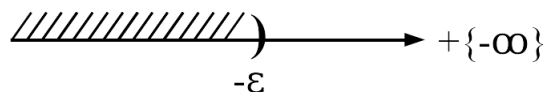
2)  $a = +\infty$

$$U(+\infty, \varepsilon) = (\varepsilon, +\infty]$$



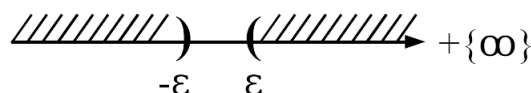
3)  $a = -\infty$

$$U(-\infty, \varepsilon) = [-\infty, -\varepsilon)$$



4)  $a = \infty$

$$U(\infty, \varepsilon) = (-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, +\infty) \cup \{\infty\}$$

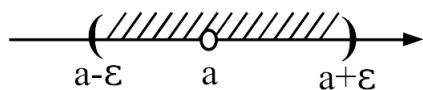


$\varepsilon$ -окрестность часто называют **окрестностью** и обозначают  $U(a)$ , опуская символ  $\varepsilon$ . В этом случае  $\varepsilon$  просто подразумевается. Обозначения  $U(a, \varepsilon)$  и  $U(a)$  эквивалентны.

*Определение*

**Проколотой окрестностью** точки  $a$  называется окрестность без самой точки  $a$ , т.е.

$$\overset{\circ}{U}(a, \varepsilon) = U(a, \varepsilon) \setminus a.$$



Помимо двусторонней окрестности  $U(a)$  для действительных чисел можно ввести односторонние окрестности:

1) правосторонняя

$$U_+(a, \varepsilon) = [a, a + \varepsilon), \overset{\circ}{U}_+(a, \varepsilon) = (a, a + \varepsilon)$$

2) левосторонняя

$$U_-(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a], \overset{\circ}{U}_-(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a)$$

## 2 Типы стремления переменной к точке

Рассмотрим произвольную переменную  $x$ , которая принимает последовательность значений  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ . В зависимости от вида последовательности  $\{x_n\}$  можно выделить несколько типов стремления переменной  $x$  к точке.

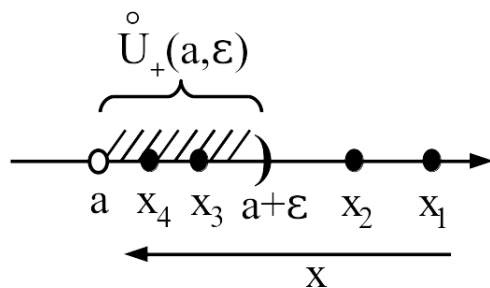
1. Одностороннее стремление

$x \rightarrow a \pm 0, a \in R$ , если

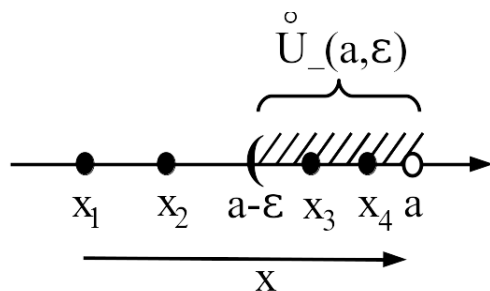
$$\forall \overset{\circ}{U}_{\pm}(a, \varepsilon) \exists n(\varepsilon) \in N \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}_{\pm}(a, \varepsilon).$$

Примеры:

а) стремление справа -  $x \rightarrow a + 0, n(\varepsilon) = 2$



б) стремление слева -  $x \rightarrow a - 0, n(\varepsilon) = 2$

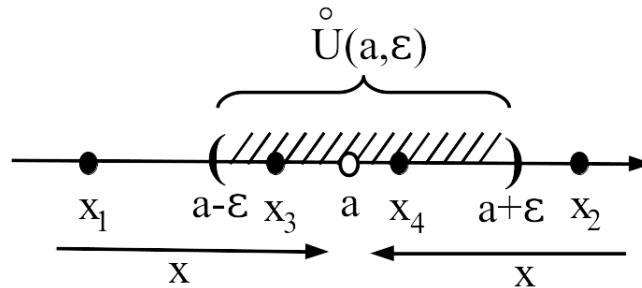


2. Двустороннее стремление

$x \rightarrow a, a \in \bar{R}$ , если

$$\forall \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon) \exists n(\varepsilon) \in N \forall n > n(\varepsilon): x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon).$$

Пример:  $x \rightarrow a$ ,  $n(\varepsilon) = 2$



### 3 Предел функции

Сначала сформулируем общее определение предела функции в терминах окрестностей и далее приведем несколько частных формулировок этого определения в терминах неравенств.

*Определение*

Точка  $b$  называется **пределом** функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow a$ , если  $\forall U(b, \varepsilon) \exists \overset{\circ}{U}(a, \delta) \forall x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta): f(x) \in U(b, \varepsilon)$ .

Расшифровка математических символов:

$\forall U(b, \varepsilon)$  - для любой  $\varepsilon$ -окрестности точки  $b$

$\exists \overset{\circ}{U}(a, \delta)$  - существует такая проколота  $\delta$ -окрестность точки  $a$ , что

$\forall x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta)$  - для любой точки  $x$  из этой окрестности

: - выполняется

$f(x) \in U(b, \varepsilon)$  - значение функции  $f$  в точке  $x$  принадлежит  $\varepsilon$ -окрестности точки  $b$

В данном определении точки  $a$  и  $b$  могут быть конечными числами или бесконечностями. Если  $a$  - конечное число, то предел также часто называют **двусторонним пределом**.

Обозначение:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ .

*Частные случаи в терминах неравенств*

1)  $a, b$  - конечные числа

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in R, 0 < |x - a| < \delta: |f(x) - b| < \varepsilon$$

Расшифровка математических символов:

$\forall \varepsilon > 0$  - для любого положительного  $\varepsilon$

$\exists \delta(\varepsilon) > 0$  - существует такое положительное  $\delta$ , зависящее от  $\varepsilon$ ,

что

$\forall x \in R$  - для любого действительного числа  $x$

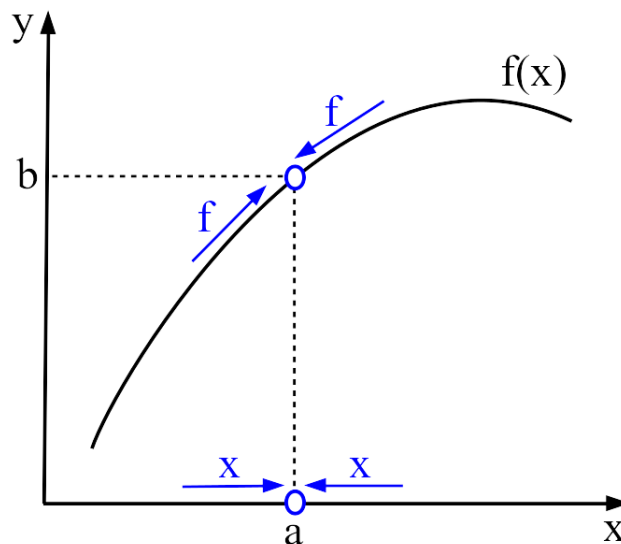
, - удовлетворяющего условию

$0 < |x - a| < \delta$  -  $|x - a|$  больше нуля и меньше  $\delta$

: - выполняется

$|f(x) - b| < \varepsilon$  -  $|f(x) - b|$  меньше  $\varepsilon$

Геометрическая интерпретация:



2)  $a$  - конечное число,  $b = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty, \text{ если}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in R, 0 < |x - a| < \delta: f(x) > \varepsilon$$

3)  $a$  - конечное число,  $b = \infty$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty, \text{ если}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in R, 0 < |x - a| < \delta: |f(x)| > \varepsilon$$

4)  $a = -\infty$ ,  $b$  - конечное число

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b, \text{ если}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in R, x < -\delta: |f(x) - b| < \varepsilon$$

*Арифметические свойства пределов*

Если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  и  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$ , причем  $b$  и  $c$  - конечные числа,  
то

- 1)  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = b \pm c$
- 2)  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = b \cdot c$
- 3)  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)/g(x)) = b/c$ , если  $c \neq 0$

## 4 Односторонние пределы

*Определение*

Точка  $b$  называется **пределом** функции  $f(x)$  **слева** при  $x \rightarrow a$ ,  
если  $\forall U(b, \varepsilon) \exists \overset{\circ}{U}_-(a, \delta) \forall x \in \overset{\circ}{U}_-(a, \delta): f(x) \in U(b, \varepsilon)$

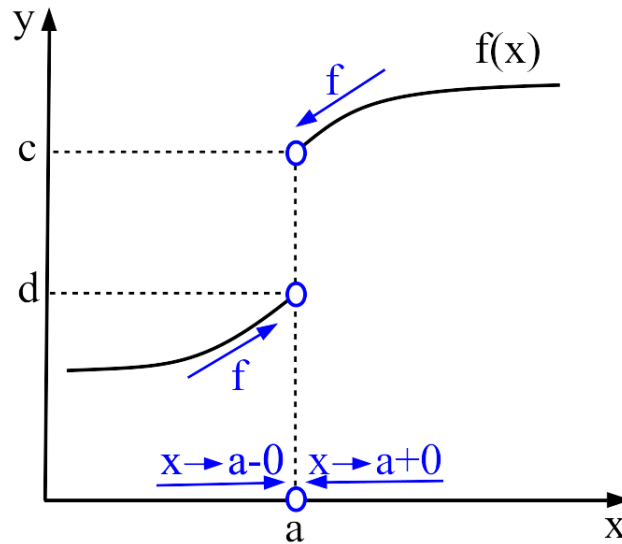
Обозначение:  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b$ .

*Определение*

Точка  $b$  называется **пределом** функции  $f(x)$  **справа** при  $x \rightarrow a$ ,  
если  $\forall U(b, \varepsilon) \exists \overset{\circ}{U}_+(a, \delta) \forall x \in \overset{\circ}{U}_+(a, \delta): f(x) \in U(b, \varepsilon)$

Обозначение:  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b$ .

Геометрическая интерпретация:



На рисунке  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = c$ ,  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = d$ .

*Теорема (о связи односторонних пределов с двусторонним)*

Функция  $f(x)$  имеет в точке  $a$  двусторонний предел тогда и только тогда, когда в этой точке существуют односторонние пределы и они равны, причем их общее значение является значением двустороннего предела.