Интегралы и дифференциальные уравнения

Модуль 2. Определенный интеграл, несобственные интегралы

Лекция 2.1

Аннотация

Определенный интеграл как предел интегральных сумм. Теорема об интегрируемости кусочно-непрерывных функций. Геометрическая интерпретация определенного интеграла. Основные свойства определенного интеграла. Теоремы об оценке и о среднем значении.

Предположим, что из города A в город B по дороге движется автомобиль и нам необходимо найти путь, который он прошел. Если бы дорога была прямолинейной, а скорость автомобиля – постоянной, мы нашли бы пройденный путь, умножив скорость на время.

В том случае, когда скорость все время изменяется, а дорога представляет собой линию сложной формы (рис. 1), найти путь простым умножением скорости на время невозможно – хотя бы уже потому, что неясно на какое именно значение скорости нужно умножить время, если скорость непостоянна. Для решения этой проблемы поступим следующим образом: разобьем время движения автомобиля из города A в город B на очень малые промежутки, в течение каждого из которых скорость автомобиля можно с хорошей точностью считать постоянной; найдем расстояние, пройденное за каждый такой промежуток, и сложим эти расстояния. Полученная сумма будет приближенно равна длине дороги, соединяющей A и B. Переведем сказанное на язык математики: пусть T – время движения автомобиля; разделим его на n промежутков; i – номер некоторого выбранного наугад промежутка, $i = 0, \ldots, n$; $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ – продолжительность i-го промежутка; заметим, что все промежутки могут иметь различную продолжительность; наибольшее из чисел Δt_i называют *диаметром разбиения* и обозначают буквой Δ (дельта): $\Delta = \max\limits_i \Delta t_i$.

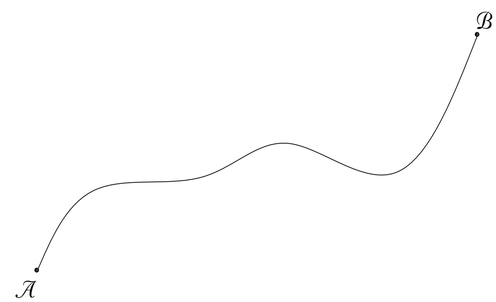

Рис. 1

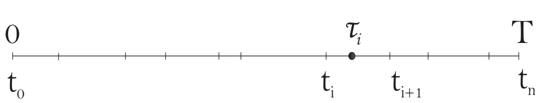

Рис. 2

Пусть $v(\tau_i)$ – скорость автомобиля, измеренная в момент времени τ_i, принадлежащий временному интервалу от t_i до t_{i+1} (см. рис. 2); так как по нашему предположению на любом интервале $(t_i; t_{i+1})$ скорость не меняется, в качестве момента τ_i можно выбрать любую точку из этого интервала. Расстояние, которое прошел автомобиль в течение промежутка времени $(t_i; t_{i+1})$ приближенно равно $v(\tau_i)\Delta t_i$, а путь от A до B (обозначим его буквой S) можно рассчитать, сложив все произведения $v(\tau_i)\Delta t_i$:

$$\boxed{S\big(\{t_i\}, \{\tau_i\}\big) = \sum_{i=0}^{n-1} v(\tau_i)\Delta t_i} \tag{2.1.1}$$

Конкретное числовое значение, которое получается при вычислении такой суммы, зависит как от выбора точек $\{t_i\}$, разбивающих заданный отрезок на малые промежутки (см. рис. 2), так и от выбора точек $\{\tau_i\}$ внутри каждого из промежутков $(t_i; t_{i+1})$ – чем больше точек $\{t_i\}$, тем мельче разбиение отрезка времени $[0; T]$, тем ближе число $S\big(\{t_i\}, \{\tau_i\}\big)$ к реальному значению пути.

Сумму (2.1.1) можно составить для любой функции и любого отрезка числовой прямой, на котором эта функция задана. Такую сумму принято называть *интегральной*.

Определение (предел интегральной суммы)

Пусть функция v определена на отрезке $[a;b]$; Δ – диаметр разбиения отрезка $[a;b]$. Число I называют пределом интегральной суммы $S\big(\{t_i\},\{\tau_i\}\big)$ при $\Delta\to 0$, если для любого положительного числа ε можно подобрать положительное число $\delta(\varepsilon)$ (зависящее от выбора ε) такое, что для любого разбиения с диаметром меньше $\delta(\varepsilon)$ и любого выбора промежуточных точек $\{\tau_i\}$ сумма $S\big(\{t_i\},\{\tau_i\}\big)$ отличается от числа I меньше, чем на ε.

Определение предела интегральной суммы на формально-логическом языке:

$$\forall\,\varepsilon>0\;\;\exists\,\delta(\varepsilon)>0\;\;\big(\Delta<\delta(\varepsilon)\Rightarrow|S\big(\{t_i\},\{\tau_i\}\big)-I|<\varepsilon\big)$$

Определение (определенный интеграл)

Пусть функция v определена на отрезке $[a;b]$. Если существует конечный (т.е. $\neq\pm\infty$) предел интегральных сумм функции v при стремлении диаметра разбиения отрезка $[a;b]$ к нулю, то этот предел называют *определенным интегралом функции* v по отрезку $[a;b]$ и обозначают символом $\int\limits_a^b v(t)dt$, а саму функцию v называют *интегрируемой* на данном отрезке.

$$\int\limits_a^b v(t)dt=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}v(\tau_i)\Delta t_i,\quad \Delta=\max_i\Delta t_i$$

Примеры

Покажем, что постоянная на отрезке $[a;b]$ функция интегрируема на этом отрезке.

Пусть $C=\mathrm{const}$ и $v(t)=C$ при всех $t\in[a;b]$. Так как $v(\tau_i)=C$ для любых промежуточных точек τ_i, то

$$S\big(\{t_i\},\{\tau_i\}\big)=\sum_{i=0}^{n-1}v(\tau_i)\Delta t_i=\sum_{i=0}^{n-1}C\cdot\Delta t_i=C\cdot\Delta t_0+C\cdot\Delta t_1+\ldots+C\cdot\Delta t_{n-1}=$$
$$=C\cdot\big(\Delta t_1+\ldots+\Delta t_{n-1}\big)=C\cdot(b-a)$$

Мы воспользовались тем, что сумма длин всех сегментов, на которые мы разбили отрезок $[a;b]$, равна длине этого отрезка, то есть разности $b-a$; $C\cdot(b-a)$ – это фиксированное число, следовательно

$$\lim_{\Delta\to 0}S\big(\{t_i\},\{\tau_i\}\big)=\lim_{\Delta\to 0}C\cdot(b-a)=C\cdot(b-a)$$

Так как предел интегральных сумм функции $v(t)=C$ при стремлении диаметра разбиения к нулю существует, эта функция интегрируема; при этом

$$\int_a^b C dt = C \cdot (b - a)$$

Нет никакой возможности проверить на интегрируемость каждую функцию по-отдельности, поскольку функций бесконечно много. Однако, можно разбить функции на *классы* (например, все непрерывные функции, все дифференцируемые функции, все аналитические функции и т.д.) и попробовать найти какой-нибудь *признак*, который позволит определить, являются функции из данного класса интегрируемыми или нет. Оказывается, такой признак действительно существует. Для того, чтобы сформулировать этот признак необходимо познакомимся с понятиями *верхней и нижней интегральных сумм.*

Предположим, что нам необходимо вычислить работу идеального газа при его расширении от объема V_1 до объема V_2. Если процесс изобарный (давление постоянно), это можно сделать просто умножив давление газа на изменение объема: $A = p\Delta V$. Если давление изменяется с изменением объема по какому-то сложному закону (см. рис. 3 и 4), то этой простой формулой воспользоваться уже не удастся.

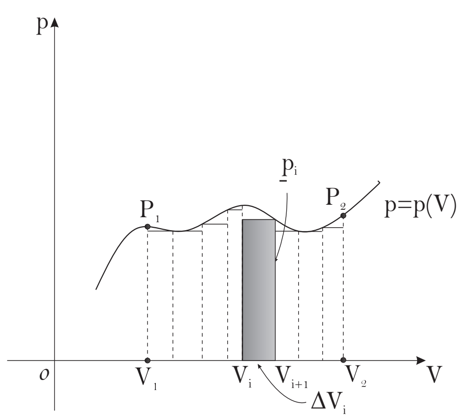

Рис. 3

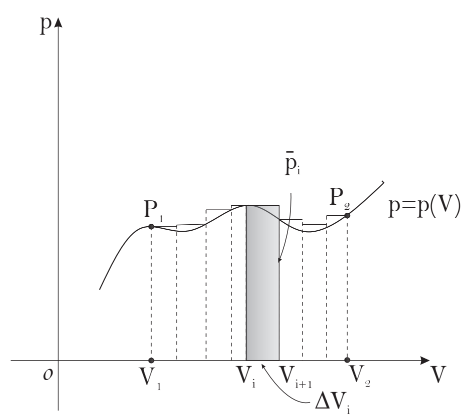

Рис. 4

Для того чтобы справиться с возникшей проблемой, разделим отрезок $[V_1; V_2]$ на такие малые сегменты, чтобы в пределах каждого из них давление можно было с хорошей точностью считать постоянным; на этих сегментах снова будет работать формула $A = p\Delta V$. Обозначим через $\underline{p}_i$ и $\overline{p}_i$ минимальное и максимальное значения давления на i-ом сегменте $[V_i; V_{i+1}]$ и составим суммы:

$$\underline{A} = \sum_{i=0}^{n-1} \underline{p}_i \Delta V_i, \quad \overline{A} = \sum_{i=0}^{n-1} \overline{p}_i \Delta V_i, \quad \Delta V_i = V_{i+1} - V_i$$

Число $\underline{A}$ – это минимальное из возможных значений работы газа (принято также говорить, что число $\underline{A}$ "позволяет оценить работу газа *снизу*"); число $\overline{A}$ – максимальное из возможных значений работы газа (оно "позволяет оценить работу газа *сверху*").

Функция p не обязана иметь какой-то физический смысл; в тех случаях, когда p – произвольная функция, число $\underline{A}$ называют *нижней интегральной суммой*, а число $\overline{A}$ – *верхней интегральной суммой*.

Теорема

Пусть функция p определена и ограничена на отрезке $[a;b]$; Δ – диаметр разбиения отрезка $[a;b]$. Для того, чтобы функция p была интегрируема на отрезке $[a;b]$ (т.е. существовал определенный интеграл функции p по этому отрезку) необходимо и достаточно, чтобы пределы нижней и верхней интегральных сумм при $\Delta \to 0$ были одинаковыми:

$$\lim_{\Delta\to 0} \underline{A} = \lim_{\Delta\to 0} \overline{A}$$

Если значения пределов верхней и нижней интегральных сумм совпадают, они равны определенному интегралу рассматриваемой функции.

Эта теорема позволяет утверждать, что на заданном отрезке ***всегда*** интегрируемы следующие функции:

- непрерывные на этом отрезке,
- кусочно-непрерывные на этом отрезке,
- монотонные и ограниченные на этом отрезке.

Также эту теорему можно использовать для выяснения ***геометрического смыла определенного интеграла***. Вернемся к рисункам 3 и 4. Фигуру, ограниченную отрезками V_1P_1, V_2P_2, V_1V_2 и участком графика P_1P_2 называют *криволинейной трапецией.* Число $\underline{A}$ представляет собой сумму площадей прямоугольников, *вписанных* в криволинейную трапецию $V_1P_1P_2V_2$, а число $\overline{A}$ – сумму площадей прямоугольников, *описанных* около той же трапеции. Чем мельче разбиение отрезка $[V_1;V_2]$, тем ближе числа $\underline{A}$ и $\overline{A}$ к площади самой трапеции. В пределе, когда диаметр разбиения стремится к нулю ($\Delta \to 0$), эти числа совпадают и становятся равными площади трапеции $V_1P_1P_2V_2$. Таким образом мы приходим к геометрическому смыслу определенного интеграла: ***определенный интеграл неотрицательной функции равен площади под графиком этой функции.*** Сделаем следующее замечание: если функция отрицательна на заданном отрезке, то площадь под ее графиком равна определенному интегралу этой функции, взятому со знаком минус; если на заданном отрезке функция меняет знак, то площади под отрицательным и положительным участками графика вычисляются по-отдельности, а затем складываются.

Отметим еще один полезный факт: верхние и нижние интегральные суммы позволяют оценить, в каком промежутке лежит значение определенного интеграла. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, $\underline{A}$ и $\overline{A}$ – нижняя и верхняя интегральные суммы, соответствующие какому-то разбиению

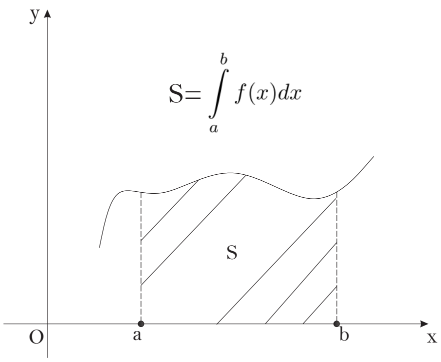

Рис. 5

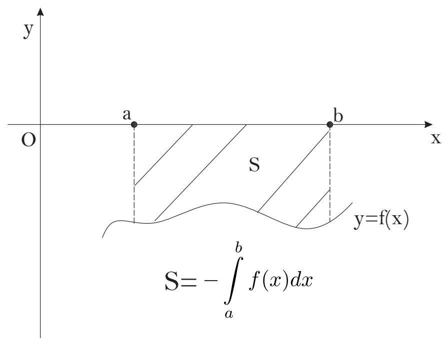

Рис. 6

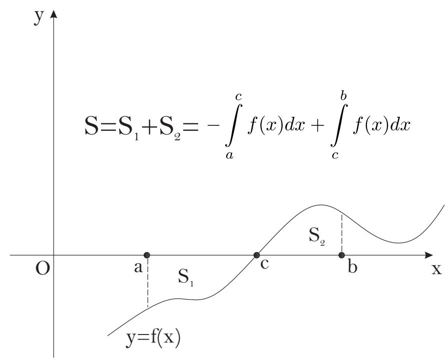

Рис. 7

отрезка $[a;b]$; тогда:

$$\boxed{\underline{A} < \int\limits_a^b f(x)dx < \overline{A}}$$

Примеры

Оценим величину интеграла $\int\limits_2^6 (75x - x^3)dx$. В этом случае $f(x) = 75x - x^3$, $a = 2$, $b = 6$. Разобьем отрезок $[2;6]$ на 4 части точками $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, $x_3 = 5$ (см. рис. 8); будем считать, что $x_0 = 2$, $x_4 = 6$. Составим таблицу:

i	Δx_i	$\underline{f}_i$	$\overline{f}_i$
1	1	142	198
2	1	198	236
3	1	236	250
4	1	234	250

Мы использовали следующие обозначения: Δx_i – длина i-го сегмента разбиения, $\underline{f}_i$ – наименьшее значение функции f на i-м сегменте, $\overline{f}_i$ – наибольшее значение функции f на i-м сегменте. Тогда:

$$\underline{M} = 142 \cdot 1 + 198 \cdot 1 + 236 \cdot 1 + 234 \cdot 1 = 810$$

$$\overline{M} = 198 \cdot 1 + 236 \cdot 1 + 250 \cdot 1 + 250 \cdot 1 = 934$$

Следовательно,

$$810 < \int\limits_2^6 (75x - x^3)dx < 934$$

Если бы мы разбили отрезок $[2;6]$ на более мелкие сегменты, то получили бы более точный результат.

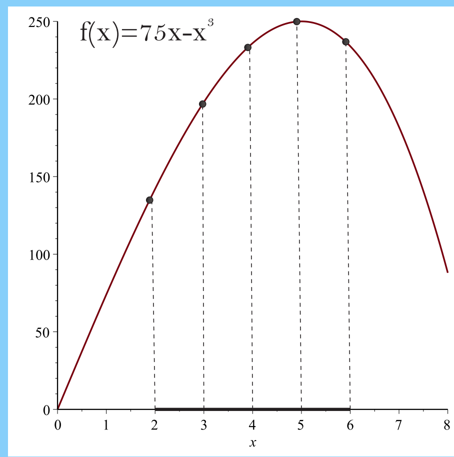

Рис. 8

Свойства определенного интеграла

0. Определенный интеграл не зависит от того, каким символом обозначена переменная интегрирования:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(t)dt = \int\limits_a^b f(u)du$$

1. Если верхний и нижний пределы интеграла совпадают, то интеграл равен нулю:

$$\int\limits_a^a f(x)dx = 0$$

2. Перестановка верхнего и нижнего пределов интеграла местами приводит к смене знака интеграла:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$$

3. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a;c]$ и $[c;b]$, то она интегрируема на всем отрезке $[a;b]$, и при этом выполняется формула:

$$\int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx$$

4. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$$\int\limits_a^b C\cdot f(x)dx = C\cdot\int\limits_a^b f(x)dx, \qquad C = \mathrm{const}$$

5. Интеграл суммы/разности функций равен сумме/разности интегралов этих функций:

$$\boxed{\int\limits_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx}$$

6. Если функция неотрицательна на отрезке $[a;b]$, то значение её интеграла по этому отрезку тоже неотрицательно:

$$\boxed{f(x) \geqslant 0 \text{ при } x \in [a;b] \Longrightarrow \int\limits_a^b f(x)dx \geqslant 0}$$

7. Если $f(x) \geqslant g(x)$ во всех точках отрезка $[a;b]$, то

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx \geqslant \int\limits_a^b g(x)dx}$$

8. Теоремы об оценках интеграла

(a) Если на отрезке $[a;b]$ функция $f(x)$ удовлетворяет неравенству $m \leqslant f(x) \leqslant M$, а функция $g(x) \geqslant 0$ на этом отрезке, то

$$\boxed{m\int\limits_a^b g(x)dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)g(x)dx \leqslant M\int\limits_a^b g(x)dx} \tag{2.1.2}$$

В частном случае, когда $g(x) = 1$ на всем отрезке $[a;b]$, формула (2.1.2) становится проще:

$$\boxed{m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a)}$$

так как $\int\limits_a^b dx = b - a$.

(b) Если на отрезке $[a;b]$ функция $f(x)$ интегрируема, то функция $|f(x)|$ тоже интегрируема на этом отрезке и справедливо неравенство:

$$\boxed{\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|dx}$$

9. Теорема о среднем значении

Если на отрезке $[a;b]$ функция $f(x)$ удовлетворяет неравенству $m \leqslant f(x) \leqslant M$, а функция $g(x)$ не меняет знак на этом отрезке (то есть $g(x) \geqslant 0$ или $g(x) \leqslant 0$ на всем отрезке $[a;b]$), то всегда найдется число μ, удовлетворяющее неравенствам $m \leqslant \mu \leqslant M$, с помощью которого интеграл

$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx$ можно вычислить по формуле:

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int\limits_a^b g(x)dx} \Longrightarrow \mu = \frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)dx}{\int\limits_a^b g(x)dx} \qquad (2.1.3)$$

Число μ принято называть *средневзвешенным значением* функции $f(x)$, а функцию $g(x)$ – *весовой функцией* или *весом*. В частном случае, когда $g(x) = 1$ на всем отрезке $[a; b]$, формула (2.1.3) становится проще:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \mu(b-a) \Longrightarrow \boxed{\mu = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx}$$

В этом случае число μ называют просто *средним значением* функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$.