Аналитическая геометрия

Модуль 1. Матричная алгебра. Векторная алгебра

Текст 2 (самостоятельное изучение)

Аннотация

Понятие линейной зависимости строк или столбцов матрицы. Ранг матрицы, теорема о ранге и ее следствие. Базисный минор. Базисные строки и столбцы. Теорема о базисном миноре и её следствие. Инвариантность ранга матрицы относительно ее элементарных преобразований. Способы вычисления ранга матрицы: метод окаймляющих миноров, метод элементарных преобразований.

§4. Ранг матрицы

4.1. Понятие о ранге матрицы

Еще одной характеристикой матрицы, помимо определителя, является ее ранг. Широко используется в теории систем линейных уравнений.

Рассмотрим матрицу размера $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Прежде, чем перейти к понятию ранга введем понятие минора матрицы, аналогичное понятию минора определителя.

<u>*Опр.*</u> **Минором порядка *k* матрицы *A*** называют определитель, который составлен из элементов этой матрицы, стоящих на пересечении произвольно выбранных k строк и k столбцов с сохранением их порядков.

<u>*Пример*</u>. Рассмотрим матрицу $A_{3\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$

Минорами 1-го порядка являются: $|1|,\ |2|,\ |3|,\ |4|,\ |0|, \dots,\ |-2|$.

Минорами 2-го порядка матрицы A являются:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}.$$

Миноры 3-го порядка - $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}.$

<u>*Опр.*</u> **Рангом** матрицы A (обозначается r, $r(A)$, $rang\,A$) называется число, которое равно наибольшему из порядков ее миноров, отличных от нуля.

Очевидно, что $0 \le r \le \min(m,n)$, где $\min(m,n)$ - наименьшее из чисел m и n.

<u>*Пример*</u>. Ранг матрицы $A_{3\times 4} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ равен двум, т.к. имеются отличные от нуля миноры второго порядка, например, $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$.

<u>*Опр.*</u> Минор M матрицы A называют **базисным**, если выполнены два условия:

а) он не равен нулю;

б) его порядок равен рангу матрицы **A**.

<u>*Пример*</u>. Базисным минором M матрицы $A_{3\times 4} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ является:

$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -15 \ne 0.$

У матрицы может быть несколько базисных миноров. **Строки** и **столбцы** матрицы, в которых расположен выбранный базисный минор, называют **базисными**.

Для квадратной матрицы n-го порядка ранг равен n тогда и только тогда, когда она является невырожденной.

<u>*Свойства*</u> ранга матрицы:

1^0. При транспонировании матрицы ее ранг не меняется.

2^0. Если вычеркнуть из матрицы нулевой ряд, то ранг матрицы не изменится.

3^0. Элементарные преобразования строк или столбцов матрицы не меняют ее ранга.

Для рангов матриц справедливы соотношения:

1. $r(A+B) \le r(A)+r(B)$;
2. $r(A+B) \le \left| r(A)-r(B) \right|$;
3. $r(A \cdot B) \le \min\{r(A), r(B)\}$;
4. $r(A \cdot B) \le r(A)$, если матрица B квадратная и $\det B = 0$;
5. $r(A \cdot B) \ge r(A)+r(B)-n$, где n –число столбцов матрицы A или строк матрицы B.

4.2. Понятие линейной зависимости строк или столбцов матрицы

Любую строку матрицы A размерности $m \times n$ можно рассматривать как матрицу из одной строки и n столбцов, а любой столбец - как матрицу из m строк и одного столбца. Следовательно, для строк и столбцов определены правила сложения и умножения на число. Например, если $P_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \end{pmatrix}$ и $P_k = \begin{pmatrix} a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} \end{pmatrix}$ - соответственно i-ый и k-ый (произносится «итый» и «катый») строки матрицы A, λ - любое число, тогда

$$P_i + \lambda P_k = \begin{pmatrix} a_{i1}+\lambda a_{k1} & a_{i2}+\lambda a_{k2} & \ldots & a_{in}+\lambda a_{kn} \end{pmatrix}.$$

<u>*Опр.*</u> Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ - действительные числа, $P_1, P_2, \ldots, P_r$, - строки матрицы A. Выражение $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \ldots + \lambda_r P_r$ называют **линейной комбинацией строк** $P_1, P_2, \ldots, P_r$, с числами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$.

<u>*Опр.*</u> Будем говорить, что ***r* строк** $P_1, P_2, \ldots, P_r$, **матрицы *A* линейно зависимы**, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, не все равные нулю, такие, что линейная комбинация строк с этими числами является нулевой строкой, то есть $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \ldots + \lambda_r P_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} = O$.

Если же последнее равенство возможно лишь при $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_r = 0$, то **строки** $P_1,\ P_2, ...,\ P_r$, называются **линейно независимыми**.

Пример. Примером линейной независимости строк являются строки единичной матрицы, а примером линейной зависимости – две одинаковые строки матрицы.

Теоремы о линейной зависимости строк матрицы:

1. Если среди строк матрицы есть нулевая, то эти строки линейно зависимы.
2. Если каждая из m строк матрицы линейно зависимы, то и все строки линейно зависимы.
3. Если строки матрицы линейно зависимы, то одна из них есть линейная комбинация остальных.

Аналогичные рассуждения можно провести и для столбцов матрицы *A*.

Теорема (о базисном миноре). Базисные строки (столбцы) матрицы *A*, соответствующие ее базисному минору *M*, линейно независимы. Любые строки (столбцы) матрицы *A*, не входящие в *M*, являются линейными комбинациями базисных строк (столбцов).

Следствие. Для того, чтобы квадратная матрица была невырожденной необходимо и достаточно, чтобы ее строки (столбцы) были линейно независимы.

Теорема (о ранге матрицы). Ранг матрицы равен максимальному числу ее линейно независимых строк (столбцов), через которые линейно выражаются все остальные ее строки (столбцы).

Следствие. Для любой матрицы максимальное число линейно независимых строк равно максимальному числу линейно независимых столбцов.

4.3. Способы вычисления ранга матрицы

Вычисление ранга матрицы по определению связано с подсчетом большого числа определителей. Поэтому для упрощения подсчета ранга матрицы используют один из двух методов: метод окаймляющих миноров или метод элементарных преобразований.

4.3.1. Метод окаймляющих миноров

Опр. Минор M' матрицы *A* называется **окаймляющим** для минора *M*, если он получается из последнего добавлением одной новой строки и одного нового столбца матрицы *A*.

Из определения следует, что порядок окаймляющего минора M' на единицу больше, чем порядок минора *M*.

В основе метода окаймляющих миноров лежит следующая теорема.

Теорема. Если в матрице какой-нибудь минор порядка *r* не равен нулю, а все миноры порядка *r+1*, его содержащие, равны нулю, то ранг матрицы равен *r*.

Теорема (об окаймляющем миноре). Если для некоторого минора матрицы все окаймляющие его миноры равны нулю, то он является базисным.

Метод окаймляющих миноров позволяет найти один из базисных миноров и *состоит в следующем*:

1. Выбирается ненулевой минор первого порядка (ненулевой элемент матрицы).
2. К этому минору последовательно добавляются такие строки и столбцы, чтобы новый окаймляющий минор был отличен от нуля. Если этого сделать нельзя, то последний ненулевой минор является базисным.

Пример. Найти ранг матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -4 & 3\\ 2 & 1 & -3 & 5\\ 1 & 8 & 6 & 1\end{pmatrix}$.

Решение.

Так как матрица A не является нулевой, то $rang\,A\geq 1$. В матрице A имеется минор второго порядка, отличный от нуля, например, $M_2^{(1)}=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=5\neq 0$.

Следовательно, $rang\, A \ge 2$. Подсчитаем все возможные миноры третьего порядка, окаймляющие $M_2^{(1)}$. Их два:

$$M_3^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 8 & 6 \end{vmatrix} = 0,\ M_3^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, все окаймляющие миноры минора $M_2^{(1)}$ равны нулю. Значит, $rang\, A = 2$.

Ответ: $rang\, A = 2$

4.3.2. Метод элементарных преобразований

Теорема (о ранге матрицы при элементарных преобразованиях). Ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях.

Всякую матрицу с помощью элементарных преобразований можно привести к ступенчатому виду.

Теорема (о ранге ступенчатой матрицы). Ранг ступенчатой матрицы равен рангу эквивалентной ступенчатой матрицы.

Пример. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & -3 \\ 2 & 4 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Приведем матрицу A с помощью элементарных преобразований к ступенчатому виду и найдем число ненулевых строк полученной матрицы.

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & -3 \\ 2 & 4 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 9 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проведены следующие элементарные преобразования: 1) переставили местами первую и вторую строки; 2) прибавили к четвертой строке третью; 3) прибавили к третьей строке первую, умноженную на -2, и четвертую строку поделили на 3; 4) поделили третью строку на 5 и переставили местами третью и четвертую строки; 5) к третьей строке, умноженной на -3, прибавили вторую строку и к четвертой строке прибавили третью.

Видно, что матрица, полученная из матрицы A указанными элементарными преобразованиями, имеет трапециевидную форму с тремя ненулевыми строками. Следовательно, $r(A) = 3$.

Замечания:

1. При нахождении ранга матрицы методом окаймляющих миноров может потребоваться не только большое количество вычислений, но и в некоторых случаях вычисление определителей высоких порядков. Однако, в результате будет найден не только ранг матрицы, но и один из ее базисных миноров.

2. Количество вычислений при нахождении ранга матрицы методом элементарных преобразований гораздо меньше. Но этот метод позволяет найти базисный минор только для матрицы ступенчатого вида, полученной в результате элементарных преобразований. Для нахождения базисного минора исходной матрицы необходимы не трудоемкие дополнительные вычисления с учетом уже известного ранга матрицы.