Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Аналитическая геометрия

Модуль 1. Матричная алгебра. Векторная алгебра

Лекция 1.5

к.ф.-м.н. Меньшова И.В.

Векторное произведение векторов

Определение

Три некомпланарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, взятые в указанном порядке, образуют **правую тройку**, если с конца третьего вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\vec{a}$ ко второму вектору $\vec{b}$ виден совершающимся против часовой стрелки, и **левую**, если по часовой.

Определение

Так как три некомпланарных вектора образуют базис в V_3, то также говорят о **правых** и **левых базисах.** Каждый базис является либо правым, либо левым, т.е. все базисы в V_3 разделяются на два класса: класс правых базисов и класс левых базисов. Класс, к которому относится фиксированный базис, называется его **ориентацией**.

Определение

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который удовлетворяет условиям:

Определение

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который удовлетворяет условиям:

1) перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$;

Определение

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который удовлетворяет условиям:

2) имеет длину, численно равную площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, как на сторонах, т.е.

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b});$$

Векторное произведение векторов

Определение

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который удовлетворяет условиям:

3) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку.

Определение

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который удовлетворяет условиям:

3) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку.

Обозначение: $\vec{a} \times \vec{b}$ или $[\vec{a}, \vec{b}]$.

Свойства векторного произведения

Свойства векторного произведения

1. При перестановке множителей векторное произведение меняет знак на противоположный, то есть $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$.

Свойства векторного произведения

1. При перестановке множителей векторное произведение меняет знак на противоположный, то есть $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$.

2. $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times \left(\lambda\vec{b}\right)$, где $\lambda \in \mathrm{R}$.

Свойства векторного произведения

3. Два ненулевых вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно $\vec{0}$, то есть $\vec{a} || \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0$.

Векторное произведение векторов

Свойства векторного произведения

3. Два ненулевых вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно $\vec{0}$, то есть $\vec{a} \| \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0$.

4. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$.

Выражение векторного произведения через координаты векторов

Выражение векторного произведения через координаты векторов

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ разложены по базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

Выражение векторного произведения через координаты векторов

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ разложены по базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$.

Выражение векторного произведения через координаты векторов

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ разложены по базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$: $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$.

Тогда, используя свойства векторного произведения, перемножая эти векторы как многочлены, найдем, что

Выражение векторного произведения через координаты векторов

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ разложены по базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$: $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$.
Тогда, используя свойства векторного произведения, перемножая эти векторы как многочлены, найдем, что
$\vec{a} \times \vec{b}$

Выражение векторного произведения через координаты векторов

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ разложены по базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$: $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$.

Тогда, используя свойства векторного произведения, перемножая эти векторы как многочлены, найдем, что

$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \times (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k})$

Выражение векторного произведения через координаты векторов

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ разложены по базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$: $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$.

Тогда, используя свойства векторного произведения, перемножая эти векторы как многочлены, найдем, что

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \times (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}.$$

Векторное произведение векторов

Или полученную формулу записывают короче в виде:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

(раскладывать можно только по первой строке!).

Некоторые приложения векторного произведения

Некоторые приложения векторного произведения

1. Установление коллинеарности векторов.

Некоторые приложения векторного произведения

1. Установление коллинеарности векторов.

Пример.

Некоторые приложения векторного произведения

1. Установление коллинеарности векторов.

Пример. Выяснить, лежат ли точки $A\,(4;-2;6)$, $B\,(1;8;-2)$, $C\,(-4;3;2)$ на одной прямой?

Решение.

Некоторые приложения векторного произведения

Решение.

1. Составим векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

Некоторые приложения векторного произведения

Решение.

1. Составим векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AB} = (1-4; 8-(-2); -2-6) = (-3; 10; -8)$,

$\overrightarrow{AC} = (-4-4; 3-(-2); 2-6) = (-8; 5; -4)$.

Некоторые приложения векторного произведения

Решение.

1. Составим векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AB} = (1-4; 8-(-2); -2-6) = (-3; 10; -8)$,

$\overrightarrow{AC} = (-4-4; 3-(-2); 2-6) = (-8; 5; -4)$.

2. Найдем векторное произведение этих векторов:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 10 & -8 \\ -8 & 5 & -4 \end{vmatrix} =$$

Некоторые приложения векторного произведения

$$= \begin{vmatrix} 10 & -8 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -3 & -8 \\ -8 & -4 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -3 & 10 \\ -8 & 5 \end{vmatrix} \vec{k} =$$

$$= 0\vec{i} + 52\vec{j} + 65\vec{k} \neq \vec{0}.$$

Некоторые приложения векторного произведения

$$= \begin{vmatrix} 10 & -8 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -3 & -8 \\ -8 & -4 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -3 & 10 \\ -8 & 5 \end{vmatrix} \vec{k} =$$

$$= 0\vec{i} + 52\vec{j} + 65\vec{k} \neq \vec{0}.$$

Это значит, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ - неколлинеарны и, следовательно, точки A, B и C не могут лежать на одной прямой.

Некоторые приложения векторного произведения

$$= \begin{vmatrix} 10 & -8 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -3 & -8 \\ -8 & -4 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -3 & 10 \\ -8 & 5 \end{vmatrix} \vec{k} =$$

$$= 0\vec{i} + 52\vec{j} + 65\vec{k} \neq \vec{0}.$$

Это значит, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ - неколлинеарны и, следовательно, точки A, B и C не могут лежать на одной прямой.

Ответ: не лежат.

Некоторые приложения векторного произведения

2. Нахождение площади параллелограмма и треугольника.

Некоторые приложения векторного произведения

2. Нахождение площади параллелограмма и треугольника.

По определению векторного произведения $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$.

Некоторые приложения векторного произведения

2. Нахождение площади параллелограмма и треугольника.

По определению векторного произведения $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$. Эту формулу можно использовать для нахождения площади параллелограмма и треугольника,

Некоторые приложения векторного произведения

2. Нахождение площади параллелограмма и треугольника.
По определению векторного произведения $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$. Эту формулу можно использовать для нахождения площади параллелограмма и треугольника, т.е.

$$S_{\text{пар}} = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

Некоторые приложения векторного произведения

2. Нахождение площади параллелограмма и треугольника.

По определению векторного произведения $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$. Эту формулу можно использовать для нахождения площади параллелограмма и треугольника, т.е.

$S_{\text{пар}} = |\vec{a} \times \vec{b}|$ и, значит, $S_{\Delta} = \dfrac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$.

Некоторые приложения векторного произведения

Пример.

Пример. Найти площадь треугольника с вершинами $A\,(5;2;-1)$, $B\,(3;1;-2)$, $C\,(4;-2;2)$.

Некоторые приложения векторного произведения

Пример. Найти площадь треугольника с вершинами $A\,(5;2;-1)$, $B\,(3;1;-2)$, $C\,(4;-2;2)$.

Решение.

Некоторые приложения векторного произведения

Пример. Найти площадь треугольника с вершинами $A\,(5; 2; -1)$, $B\,(3; 1; -2)$, $C\,(4; -2; 2)$.

Решение.

1. Найдем векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

Некоторые приложения векторного произведения

Пример. Найти площадь треугольника с вершинами $A\,(5;2;-1)$, $B\,(3;1;-2)$, $C\,(4;-2;2)$.

Решение.

1. Найдем векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = (3-5;1-2;-2-(-1)) = (-2;-1;-1),$$

$$\overrightarrow{AC} = (4-5;-2-2;2-(-1)) = (-1;-4;3).$$

Некоторые приложения векторного произведения

2. Вычислим векторное произведение:

Некоторые приложения векторного произведения

2. Вычислим векторное произведение:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$$

Некоторые приложения векторного произведения

2. Вычислим векторное произведение:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & 3 \end{vmatrix}$$

2. Вычислим векторное произведение:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} \vec{k}$$

Некоторые приложения векторного произведения

2. Вычислим векторное произведение:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} \vec{k} =$$

$$= -7\vec{i} + 7\vec{j} + 7\vec{k}.$$

Некоторые приложения векторного произведения

3. $S_\Delta = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{7^2 + 7^2 + 7^2} = \frac{7}{2}\sqrt{3}$(кв.ед).

Ответ: $S_\Delta = \frac{7}{2}\sqrt{3}$(кв.ед).

Некоторые приложения векторного произведения

Пример.

Некоторые приложения векторного произведения

Пример. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$ и $\vec{b} = 2\vec{m} + \vec{n}$, где $\vec{m}$ и $\vec{n}$ - единичные векторы, образующие угол 30°.

Некоторые приложения векторного произведения

Решение.

Некоторые приложения векторного произведения

Решение.

1. Найдем векторное произведение:

Некоторые приложения векторного произведения

Решение.

1. Найдем векторное произведение:

$\vec{a} \times \vec{b}$

Некоторые приложения векторного произведения

Решение.

1. Найдем векторное произведение:

$\vec{a} \times \vec{b} = (\vec{m} + 2\vec{n}) \times (2\vec{m} + \vec{n})$

Некоторые приложения векторного произведения

Решение.

1. Найдем векторное произведение:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (\vec{m} + 2\vec{n}) \times (2\vec{m} + \vec{n}) =$$

$$= 2(\vec{m} \times \vec{m}) + \vec{m} \times \vec{n} + 4(\vec{n} \times \vec{m}) + 2(\vec{n} \times \vec{n})$$

Некоторые приложения векторного произведения

Решение.

1. Найдем векторное произведение:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (\vec{m} + 2\vec{n}) \times (2\vec{m} + \vec{n}) =$$
$$= 2(\vec{m} \times \vec{m}) + \vec{m} \times \vec{n} + 4(\vec{n} \times \vec{m}) + 2(\vec{n} \times \vec{n}) =$$
$$= \vec{m} \times \vec{n} - 4(\vec{m} \times \vec{n})$$

Некоторые приложения векторного произведения

Решение.

1. Найдем векторное произведение:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (\vec{m} + 2\vec{n}) \times (2\vec{m} + \vec{n}) =$$

$$= 2(\vec{m} \times \vec{m}) + \vec{m} \times \vec{n} + 4(\vec{n} \times \vec{m}) + 2(\vec{n} \times \vec{n}) =$$

$$= \vec{m} \times \vec{n} - 4(\vec{m} \times \vec{n}) = -3(\vec{m} \times \vec{n}).$$

Решение.

1. Найдем векторное произведение:

$$\vec{a}\times\vec{b}=(\vec{m}+2\vec{n})\times(2\vec{m}+\vec{n})=$$
$$=2(\vec{m}\times\vec{m})+\vec{m}\times\vec{n}+4(\vec{n}\times\vec{m})+2(\vec{n}\times\vec{n})=$$
$$=\vec{m}\times\vec{n}-4(\vec{m}\times\vec{n})=-3(\vec{m}\times\vec{n}).$$

2. Вычислим модуль векторного произведения:

Решение.

1. Найдем векторное произведение:

$$\vec{a}\times\vec{b}=(\vec{m}+2\vec{n})\times(2\vec{m}+\vec{n})=$$
$$=2(\vec{m}\times\vec{m})+\vec{m}\times\vec{n}+4(\vec{n}\times\vec{m})+2(\vec{n}\times\vec{n})=$$
$$=\vec{m}\times\vec{n}-4(\vec{m}\times\vec{n})=-3(\vec{m}\times\vec{n}).$$

2. Вычислим модуль векторного произведения:

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$$

Некоторые приложения векторного произведения

Решение.

1. Найдем векторное произведение:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (\vec{m} + 2\vec{n}) \times (2\vec{m} + \vec{n}) =$$

$$= 2(\vec{m} \times \vec{m}) + \vec{m} \times \vec{n} + 4(\vec{n} \times \vec{m}) + 2(\vec{n} \times \vec{n}) =$$

$$= \vec{m} \times \vec{n} - 4(\vec{m} \times \vec{n}) = -3(\vec{m} \times \vec{n}).$$

2. Вычислим модуль векторного произведения:

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |-3(\vec{m} \times \vec{n})|$$

Решение.

1. Найдем векторное произведение:

$$\vec{a}\times\vec{b}=(\vec{m}+2\vec{n})\times(2\vec{m}+\vec{n})=$$

$$=2(\vec{m}\times\vec{m})+\vec{m}\times\vec{n}+4(\vec{n}\times\vec{m})+2(\vec{n}\times\vec{n})=$$

$$=\vec{m}\times\vec{n}-4(\vec{m}\times\vec{n})=-3(\vec{m}\times\vec{n}).$$

2. Вычислим модуль векторного произведения:

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|-3(\vec{m}\times\vec{n})\right|=3\cdot|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|\sin 30=$$

Некоторые приложения векторного произведения

Решение.

1. Найдем векторное произведение:

$$\vec{a}\times\vec{b}=(\vec{m}+2\vec{n})\times(2\vec{m}+\vec{n})=$$
$$=2(\vec{m}\times\vec{m})+\vec{m}\times\vec{n}+4(\vec{n}\times\vec{m})+2(\vec{n}\times\vec{n})=$$
$$=\vec{m}\times\vec{n}-4(\vec{m}\times\vec{n})=-3(\vec{m}\times\vec{n}).$$

2. Вычислим модуль векторного произведения:

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|-3(\vec{m}\times\vec{n})\right|=3\cdot|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|\sin 30=$$
$$=3\cdot 1\cdot 1\cdot 1/2=1,5.$$

Некоторые приложения векторного произведения

3. $S_{\text{пар}} = |\vec{a} \times \vec{b}| = 1,5.$

Ответ: $S_{\text{пар}} = 1,5.$

Некоторые приложения векторного произведения

3. Определение момента силы относительно точки.

3. Определение момента силы относительно точки.

Пусть в точке A приложена сила $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{AB}$ и пусть O – некоторая точка пространства.

Некоторые приложения векторного произведения

3. Определение момента силы относительно точки.

Пусть в точке A приложена сила $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{AB}$ и пусть O – некоторая точка пространства. Из физики известно, что **моментом силы** $\overrightarrow{F}$ относительно точки O называется вектор $\vec{m}$, который проходит через точку O и:

Некоторые приложения векторного произведения

а) перпендикулярен плоскости, проходящей через точки O, A, B;

Некоторые приложения векторного произведения

а) перпендикулярен плоскости, проходящей через точки O, A, B;
б) численно равен произведению силы на плечо

Некоторые приложения векторного произведения

а) перпендикулярен плоскости, проходящей через точки O, A, B;
б) численно равен произведению силы на плечо

$|\vec{m}|$

Некоторые приложения векторного произведения

а) перпендикулярен плоскости, проходящей через точки O, A, B;

б) численно равен произведению силы на плечо

$$|\vec{m}| = |\overrightarrow{F}| \cdot ON$$

Некоторые приложения векторного произведения

а) перпендикулярен плоскости, проходящей через точки O, A, B;

б) численно равен произведению силы на плечо

$$|\vec{m}| = |\overrightarrow{F}| \cdot ON = |\overrightarrow{F}| \cdot |r| \cdot \sin\varphi$$

Некоторые приложения векторного произведения

а) перпендикулярен плоскости, проходящей через точки O, A, B;
б) численно равен произведению силы на плечо

$$|\vec{m}| = |\overrightarrow{F}| \cdot ON = |\overrightarrow{F}| \cdot |r| \cdot \sin\varphi =$$
$$= |\overrightarrow{F}| \cdot |\overrightarrow{OA}| \sin(\overrightarrow{F} \widehat{,} \overrightarrow{OA});$$

Некоторые приложения векторного произведения

а) перпендикулярен плоскости, проходящей через точки O, A, B;

б) численно равен произведению силы на плечо

$$|\vec{m}| = |\overrightarrow{F}| \cdot ON = |\overrightarrow{F}| \cdot |r| \cdot \sin\varphi =$$

$$= |\overrightarrow{F}| \cdot |\overrightarrow{OA}| \sin(\overrightarrow{F} \widehat{,} \overrightarrow{OA});$$

в) образует правую тройку с векторами $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{AB}$.

Некоторые приложения векторного произведения

а) перпендикулярен плоскости, проходящей через точки O, A, B;
б) численно равен произведению силы на плечо
$|\vec{m}| = |\overrightarrow{F}| \cdot ON = |\overrightarrow{F}| \cdot |r| \cdot \sin\varphi =$
$= |\overrightarrow{F}| \cdot |\overrightarrow{OA}| \sin(\overrightarrow{F} \widehat{,} \overrightarrow{OA})$;
в) образует правую тройку с векторами $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{AB}$.
Следовательно, $\vec{m} = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{F}$.

Некоторые приложения векторного произведения

Пример.

Некоторые приложения векторного произведения

Пример. Сила $\overrightarrow{F} = (2, -4, 5)$ приложена к точке $A(4, -2, 3)$. Определить момент этой силы относительно точки $O(3, 2, -1)$.

Некоторые приложения векторного произведения

Пример. Сила $\overrightarrow{F} = (2, -4, 5)$ приложена к точке $A(4, -2, 3)$. Определить момент этой силы относительно точки $O(3, 2, -1)$.

Решение.

Пример. Сила $\overrightarrow{F} = (2, -4, 5)$ приложена к точке $A(4, -2, 3)$. Определить момент этой силы относительно точки $O(3, 2, -1)$.

Решение.

Найдем вектор
$\overrightarrow{OA}$

Некоторые приложения векторного произведения

Пример. Сила $\overrightarrow{F} = (2, -4, 5)$ приложена к точке $A(4, -2, 3)$. Определить момент этой силы относительно точки $O(3, 2, -1)$.

Решение.

Найдем вектор
$\overrightarrow{OA} = (4 - 3; -2 - 2; -1 - 3) = (1; -4; -4)$.

Некоторые приложения векторного произведения

Пример. Сила $\overrightarrow{F} = (2, -4, 5)$ приложена к точке $A(4, -2, 3)$. Определить момент этой силы относительно точки $O(3, 2, -1)$.

Решение.

Найдем вектор
$\overrightarrow{OA} = (4 - 3; -2 - 2; -1 - 3) = (1; -4; -4)$.

Тогда момент $\vec{m}$ силы $\overrightarrow{F}$ относительно точки O равен:

Некоторые приложения векторного произведения

$$\vec{m} = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{F}$$

Некоторые приложения векторного произведения

$$\vec{m} = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -4 & -4 \\ 2 & -4 & 5 \end{vmatrix}$$

Некоторые приложения векторного произведения

$$\vec{m} = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -4 & -4 \\ 2 & -4 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -4 & -4 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} \vec{k}$$

Некоторые приложения векторного произведения

$$\vec{m} = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -4 & -4 \\ 2 & -4 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -4 & -4 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} \vec{k} =$$

$$= -36\vec{i} - 13\vec{j} + 4\vec{k}$$

Некоторые приложения векторного произведения

$$\vec{m} = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -4 & -4 \\ 2 & -4 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -4 & -4 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} \vec{k} =$$

$$= -36\vec{i} - 13\vec{j} + 4\vec{k} = (-36; -13; 4).$$

Некоторые приложения векторного произведения

$$\vec{m} = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -4 & -4 \\ 2 & -4 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -4 & -4 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} \vec{k} =$$

$$= -36\vec{i} - 13\vec{j} + 4\vec{k} = (-36; -13; 4).$$

Ответ: $\vec{m} = (-36; -13; 4)$.

Смешанное произведение векторов

Определение

Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$ - скалярному произведению векторного произведения первых двух векторов и третьего вектора.

Определение

Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$ - скалярному произведению векторного произведения первых двух векторов и третьего вектора.

Обозначение: $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Геометрическая интерпретация смешанного произведения

Смешанное произведение векторов

Геометрическая интерпретация смешанного произведения

На трех некомпланарных векторах $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ построим параллелепипед как на ребрах, выходящих из одной вершины. Тогда объем построенного параллелепипеда будет численно равен значению смешанного произведения векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и взятому со знаком «плюс», если тройка векторов правая, со знаком «минус», если тройка – левая.

Свойства смешанного произведения.

Смешанное произведение векторов

Свойства смешанного произведения.

1. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$ (циклическая перестановка).

Свойства смешанного произведения.

1. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$ (циклическая перестановка).

2. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ (перестановка местами знаков векторного и скалярного произведения).

Свойства смешанного произведения.

1. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$ (циклическая перестановка).

2. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ (перестановка местами знаков векторного и скалярного произведения).

3. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b}$; $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c}$; $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}$ (перестановка двух векторов).

Смешанное произведение векторов

Свойства смешанного произведения.

1. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$ (циклическая перестановка).
2. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ (перестановка местами знаков векторного и скалярного произведения).
3. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b}$; $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c}$; $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}$ (перестановка двух векторов).
4. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$ тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

Выражение смешанного произведения через координаты

Пусть векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ разложены по базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

Выражение смешанного произведения через координаты

Пусть векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ разложены по базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},\\
\vec{b} &= b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k},\\
\vec{c} &= c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}.
\end{aligned}$$

Смешанное произведение векторов

Тогда, используя свойства смешанного произведения, найдем, что

$\vec{a}\vec{b}\vec{c}$

Смешанное произведение векторов

Тогда, используя свойства смешанного произведения, найдем, что

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$$

Тогда, используя свойства смешанного произведения, найдем, что

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot (c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k})$$

Тогда, используя свойства смешанного произведения, найдем, что

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot (c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}) =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k} \right) \cdot$$

$$\cdot (c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}) =$$

Смешанное произведение векторов

$$= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} c_z$$

Смешанное произведение векторов

$$= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} c_z =$$

$$= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Смешанное произведение векторов

Тогда

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Некоторые приложения смешанного произведения

Некоторые приложения смешанного произведения

1. Определение взаимной ориентации векторов в пространстве.

Некоторые приложения смешанного произведения

1. Определение взаимной ориентации векторов в пространстве.

Если $\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0$, то тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - правая, если $\vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0$, то тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - левая.

2. Установление компланарности векторов.

2. Установление компланарности векторов.
$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0 \Leftrightarrow$ векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - компланарны.

Пример.

Пример. Выяснить, лежат ли точки
$M_1\,(2;5;3)$, $M_2\,(3;7;4)$, $M_3\,(-5;5;-1)$,
$M_4\,(-4;-3;0)$ в одной плоскости?

Смешанное произведение векторов

Решение:

Решение:

1. Найдем векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$, $\overrightarrow{M_1M_4}$.

Решение:

1. Найдем векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$, $\overrightarrow{M_1M_4}$.

$\overrightarrow{M_1M_2} = (3 - 2; 7 - 5; 4 - 3) = (1; 2; 1)$,

$\overrightarrow{M_1M_3} = (-5 - 2; 5 - 5; -1 - 3) = (-7; 0; -4)$,

$\overrightarrow{M_1M_4} = (-4 - 2; -3 - 5; 0 - 3) = (-6; -8; -3)$.

2. Вычислим смешанное произведение векторов $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$, $\overrightarrow{M_1M_4}$.

2. Вычислим смешанное произведение векторов $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$, $\overrightarrow{M_1M_4}$.

$$\overrightarrow{M_1M_2}\,\overrightarrow{M_1M_3}\,\overrightarrow{M_1M_4} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -7 & 0 & -4 \\ -6 & -8 & -3 \end{vmatrix} = 30 \neq 0.$$

Отсюда, на основании свойства 4 смешанного произведения делаем вывод, что векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$, $\overrightarrow{M_1M_4}$ не лежат в одной плоскости, а значит, и точки M_1, M_2, M_3, M_4 не лежат в одной плоскости.

3. Определение объемов параллелепипеда и треугольной пирамиды

3. Определение объемов параллелепипеда и треугольной пирамиды

Согласно геометрическому смыслу смешанного произведения векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ объем параллелепипеда, построенного на этих векторах, равен $V = \vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

3. Определение объемов параллелепипеда и треугольной пирамиды

Согласно геометрическому смыслу смешанного произведения векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ объем параллелепипеда, построенного на этих векторах, равен $V = \vec{a}\vec{b}\vec{c}$. А объем треугольной пирамиды, построенной на этих же вектора $V_1 = \dfrac{1}{6}V = \dfrac{1}{6}\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Смешанное произведение векторов

3. Определение объемов параллелепипеда и треугольной пирамиды

Согласно геометрическому смыслу смешанного произведения векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ объем параллелепипеда, построенного на этих векторах, равен $V = \vec{a}\vec{b}\vec{c}$. А объем треугольной пирамиды, построенной на этих же вектора $V_1 = \dfrac{1}{6}V = \dfrac{1}{6}\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Пример.

Пример. Найти объем пирамиды, если заданы ее вершины: $A\,(1;-1;-1)$, $B\,(0;5;4)$, $C\,(2;-3;-4)$, $D\,(5;-4;-6)$.

Решение:

Решение:

1. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$.

Смешанное произведение векторов

Решение:

1. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{AB} = (-1; 6; 5)$,

$\overrightarrow{AC} = (1; -2; -3)$,

$\overrightarrow{AD} = (4; -3; -5)$.

2. Вычислим смешанное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$.

2. Вычислим смешанное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$.

$$\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -1 & 6 & 5 \\ 1 & -2 & -3 \\ 4 & -3 & -5 \end{vmatrix} = -18.$$

Тогда объем параллелепипеда, построенного на трех рассматриваемых векторах, равен $V = |-18| = 18$ куб. ед., а искомый объем треугольной пирамиды $ABCD$ равен

$V_1 = \dfrac{1}{6} \cdot 18 = 3$ куб. ед.

Ответ: $V_{\text{пир}} = 3$ куб.ед.