Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Аналитическая геометрия

Модуль 1. Матричная алгебра. Векторная алгебра

Лекция 1.4

к.ф.-м.н. Меньшова И.В.

Векторы. Основные понятия

Определение

Величины, которые полностью определяются своим числовым значением, называются **скалярными** (площадь, длина, объем, температура, работа, масса).

Определение

Величины, которые характеризуются не только своим числовым значением, но и направлением, называются **векторными** (сила, скорость, ускорение).

Определение

Геометрический вектор – направленный прямолинейный отрезок, т.е. отрезок, который имеет длину и направление.

Определение

Геометрический вектор – направленный прямолинейный отрезок, т.е. отрезок, который имеет длину и направление.

Обозначение: если A - начало вектора, а B - его конец, то вектор обозначается символом $\overrightarrow{AB}$ или $\vec{a}$.

Виды геометрических векторов:

Виды геометрических векторов:

1. Когда заданы направление и длина, но не фиксируется точка приложения, говорят, что задан **свободный вектор** или просто **вектор**.

Виды геометрических векторов:

1. Когда заданы направление и длина, но не фиксируется точка приложения, говорят, что задан **свободный вектор** или просто **вектор**.

2. Геометрические векторы, которые можно перемещать только вдоль прямых, называют **скользящими** (вектор угловой скорости и вектор силы, действующий на абсолютно твердое тело).

Виды геометрических векторов:

3. Геометрические векторы, точка приложения которых не может изменяться, называют **связанными** (скорость в потоке жидкости или газа).

Определение

Вектор $\overrightarrow{BA}$ называется противоположным к вектору $\overrightarrow{AB}$. Вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, обозначается $-\vec{a}$.

Определение

Длиной или **модулем** вектора$\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB и обозначается $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Определение

Вектор, длина которого равна нулю, называется **нулевым** и обозначается $\vec{0}$.

Определение
Вектор, длина которого равна нулю, называется **нулевым** и обозначается $\vec{0}$.

Нулевой вектор направления не имеет.

Определение
Вектор, длина которого равна единице, называется **единичным** вектором и обозначается $\vec{e}$.

Определение

Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, называется **ортом** вектора $\vec{a}$ и обозначается $\overrightarrow{a}^0$.

Векторы. Основные понятия

Определение
Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, называется **ортом** вектора $\vec{a}$ и обозначается $\overrightarrow{a}^0$.

Очевидно, что $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \overrightarrow{a}^0$ и $\overrightarrow{a}^0 = \vec{a} / |\vec{a}|$.

Определение

Углом φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют угол между их направлениями.

Определение
Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых: $\vec{a} || \vec{b}$.

Коллинеарные векторы могут быть **сонаправлены** (иметь одно направление) или **противоположно направлены**.

Коллинеарные векторы могут быть **сонаправлены** (иметь одно направление) или **противоположно направлены**. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Определение

Три вектора в пространстве называются **компланарными,** если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Если среди трех векторов есть нулевой или любые два из них коллинеарны, то они компланарны.

Определение

Два вектора называются **равными** ($\vec{a} = \vec{b}$), если

1) они коллинеарны и сонаправлены;

2) имеют равные длины, т.е. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

Из определения равенства векторов следует, что вектор можно переносить параллельно самому себе, а начало вектора помещать в любую точку пространства.

Линейные операции над векторами

Линейные операции над векторами

Под линейными операциями над векторами понимают операции сложения, вычитания и умножения вектора на число.

Сложение векторов

Определение
Пусть заданы векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Возьмем точку O и построим векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$.
Вектор $\overrightarrow{OB}$ называется **суммой векторов** $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Сложение векторов

Определение

Пусть заданы векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Возьмем точку O и построим векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{b}$. Вектор $\overrightarrow{OB}$ называется **суммой векторов** $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Это правило сложения двух векторов носит название **правило треугольника.**

Можно складывать два вектора и по **правилу параллелограмма**.

Сложение векторов

Можно складывать два вектора и по **правилу параллелограмма**. Для этого необходимо подвести эти векторы к одному началу и построить на них параллелограмм.

Сложение векторов

Можно складывать два вектора и по **правилу параллелограмма**. Для этого необходимо подвести эти векторы к одному началу и построить на них параллелограмм. Тогда суммой двух векторов будет являться вектор, расположенный на диагонали параллелограмма, выходящей из их общего начала.

Сложение векторов

Отметим, что если векторы коллинеарны, то их сумму по правилу параллелограмма определить не получится, а правило треугольника в этом случае применимо.

Сложение векторов

Отметим, что если векторы коллинеарны, то их сумму по правилу параллелограмма определить не получится, а правило треугольника в этом случае применимо. При сложении трех и более векторов строим векторную ломаную, каждое звено которой есть вектор, приложенный к концу предыдущего вектора. Тогда суммой векторов будет являться вектор, направленный из начала первого вектора к концу последнего.

Вычитание векторов

Вычитание векторов

Определение

Под **разностью векторов** $\vec{a}$ и $\vec{b}$ понимается вектор $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ такой, что $\vec{c} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Умножение вектора на скаляр

Умножение вектора на скаляр

Определение

Произведением вектора $\vec{a}$ **на скаляр (число)** λ называется вектор $\vec{c} = \lambda\vec{a}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) он имеет длину $|\vec{c}| = |\lambda|\,|\vec{a}|$;

2) его направление совпадает с направление вектора $\vec{a}$, если $\lambda > 0$ и противоположно вектору $\vec{a}$, если $\lambda < 0$.

Свойства линейных операций над векторами

Свойства линейных операций над векторами

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;

Свойства линейных операций над векторами

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$;

Свойства линейных операций над векторами

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$;
3. $\lambda_1 \cdot (\lambda_2 \vec{a}) = (\lambda_1 \cdot \lambda_2)\vec{a}$;

Свойства линейных операций над векторами

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$;
3. $\lambda_1 \cdot (\lambda_2 \vec{a}) = (\lambda_1 \cdot \lambda_2)\vec{a}$;
4. $(\lambda_1 + \lambda_2)\vec{a} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{a}$;

Свойства линейных операций над векторами

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$;
3. $\lambda_1 \cdot (\lambda_2 \vec{a}) = (\lambda_1 \cdot \lambda_2)\vec{a}$;
4. $(\lambda_1 + \lambda_2)\vec{a} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{a}$;
5. $\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$;

Свойства линейных операций над векторами

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$;
3. $\lambda_1 \cdot (\lambda_2 \vec{a}) = (\lambda_1 \cdot \lambda_2)\vec{a}$;
4. $(\lambda_1 + \lambda_2)\vec{a} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{a}$;
5. $\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$;
6. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;

Свойства линейных операций над векторами

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$;
3. $\lambda_1 \cdot (\lambda_2 \vec{a}) = (\lambda_1 \cdot \lambda_2)\vec{a}$;
4. $(\lambda_1 + \lambda_2)\vec{a} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{a}$;
5. $\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$;
6. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;
7. для любого вектора $\vec{a}$ существует вектор $-\vec{a}$, такой что $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

Проекция вектора на ось

Проекция вектора на ось

Пусть в пространстве задана ось l, т.е. направленная прямая.

Проекция вектора на ось

Пусть в пространстве задана ось l, т.е. направленная прямая.

Определение

Ортогональной проекцией (или просто проекцией) точки M на ось l называется основание M_1 перпендикуляра MM_1, опущенного из точки на ось.

Проекция вектора на ось

Точка M_1 есть точка пересечения оси l с плоскостью, проходящей через точку M перпендикулярно оси.

Проекция вектора на ось

Точка M_1 есть точка пересечения оси l с плоскостью, проходящей через точку M перпендикулярно оси.
Если точка M лежит на оси l, то проекция точки M на эту ось совпадает с M.

Проекция вектора на ось

Пусть задан вектор $\overrightarrow{AB}$ и ось l. Пусть A_1 - проекция точки A, B_1 - проекция точки B на ось l.

Проекция вектора на ось

Определение

Ортогональной проекцией (или просто проекцией) вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l называется положительное число $\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, если вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ и ось l одинаково направлены и отрицательное число $-\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, если вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ и ось l противоположно направлены.

Проекция вектора на ось

Если A_1 и B_1 совпадают, то проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ равна нулю.

Проекция вектора на ось

Если A_1 и B_1 совпадают, то проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ равна нулю.

Обозначение: $\text{пр}_l \overrightarrow{AB}$

Проекция вектора на ось

Если A_1 и B_1 совпадают, то проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ равна нулю.

Обозначение: $\text{пр}_l \overrightarrow{AB}$

Замечание. Если $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ или $\overrightarrow{AB} \perp \vec{l}$, то $\text{пр}_l \overrightarrow{AB} = 0$.

Проекция вектора на ось

Основные свойства проекций:

Проекция вектора на ось

Основные свойства проекций:

1. Проекция вектора $\vec{a}$ на ось l равна произведению модуля вектора $\vec{a}$ на косинус угла φ между вектором $\vec{a}$ и осью l:

$$\text{пр}_l\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi.$$

Проекция вектора на ось

Следствия свойства 1:

Проекция вектора на ось

Следствия свойства 1:

1) Проекция вектора на ось положительна (отрицательна), если вектор образует с осью острый (тупой) угол, и равна нулю, если этот угол – прямой.

Проекция вектора на ось

Следствия свойства 1:

1) Проекция вектора на ось положительна (отрицательна), если вектор образует с осью острый (тупой) угол, и равна нулю, если этот угол – прямой.

2) Проекции равных векторов на одну и ту же ось равны между собой.

Проекция вектора на ось

Основные свойства проекций:

Основные свойства проекций:

2. Проекция суммы векторов на одну и ту же ось равна сумме их проекций на эту ось:

$\text{пр}_l(\vec{a} + \vec{b}) = \text{пр}_l\vec{a} + \text{пр}_l\vec{b}$.

Проекция вектора на ось

Основные свойства проекций:

2. Проекция суммы векторов на одну и ту же ось равна сумме их проекций на эту ось: $\text{пр}_l(\vec{a} + \vec{b}) = \text{пр}_l\vec{a} + \text{пр}_l\vec{b}$.

3. При умножении вектора $\vec{a}$ на число λ его проекция также умножается на это число: $\text{пр}_l(\alpha \cdot \vec{a}) = \alpha \cdot \text{пр}_l\vec{a}$.

Замечание.

Замечание. Линейные операции над векторами приводят к линейным операциям над проекциями этих векторов.

Разложение вектора по ортам координатных осей. Модуль вектора. Направляющие косинусы

Разложение вектора по ортам координатных осей. Модуль вектора. Направляющие косинусы

Рассмотрим в пространстве прямоугольную систему координат $Oxyz$.

Разложение вектора по ортам координатных осей. Модуль вектора. Направляющие косинусы

Рассмотрим в пространстве прямоугольную систему координат $Oxyz$. Выделим на координатных осях Ox, Oy, Oz единичные векторы (орты), обозначаемые соответственно $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Разложение вектора по ортам координатных осей. Модуль вектора. Направляющие косинусы

Рассмотрим вектор $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$.

Разложение вектора по ортам координатных осей. Модуль вектора. Направляющие косинусы

Рассмотрим вектор $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$. Проведем через точку M плоскости, параллельные координатным плоскостям.

Разложение вектора по ортам координатных осей. Модуль вектора. Направляющие косинусы

Рассмотрим вектор $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$. Проведем через точку M плоскости, параллельные координатным плоскостям. Тогда $\text{пр}_x\vec{a} = \left|\overrightarrow{OM_1}\right|$, $\text{пр}_y\vec{a} = \left|\overrightarrow{OM_2}\right|$, $\text{пр}_z\vec{a} = \left|\overrightarrow{OM_3}\right|$.

Разложение вектора по ортам координатных осей. Модуль вектора. Направляющие косинусы

Рассмотрим вектор $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$. Проведем через точку M плоскости, параллельные координатным плоскостям. Тогда $\text{пр}_x \vec{a} = \left|\overrightarrow{OM_1}\right|$, $\text{пр}_y \vec{a} = \left|\overrightarrow{OM_2}\right|$, $\text{пр}_z \vec{a} = \left|\overrightarrow{OM_3}\right|$.

По определению суммы нескольких векторов находим: $\vec{a} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1 N} + \overrightarrow{NM}$.

Разложение вектора по ортам координатных осей. Модуль вектора. Направляющие косинусы

Следовательно, $\vec{a} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}$.

Разложение вектора по ортам координатных осей. Модуль вектора. Направляющие косинусы

Следовательно, $\vec{a} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}$.

$$\overrightarrow{OM_1} = \left|\overrightarrow{OM_1}\right| \cdot \vec{i} = a_x\vec{i},$$

$$\overrightarrow{OM_2} = \left|\overrightarrow{OM_2}\right| \cdot \vec{j} = a_y\vec{j},$$

$$\overrightarrow{OM_3} = \left|\overrightarrow{OM_3}\right| \cdot \vec{k} = a_z\vec{k}.$$

Разложение вектора по ортам координатных осей. Модуль вектора. Направляющие косинусы

Таким образом, получаем **разложение вектора по ортам координатных осей**:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}.$$

Разложение вектора по ортам координатных осей. Модуль вектора. Направляющие косинусы

Определение

Числа a_x, a_y, a_z называются координатами вектора $\vec{a}$.

Разложение вектора по ортам координатных осей. Модуль вектора. Направляющие косинусы

Определение

Числа a_x, a_y, a_z называются координатами вектора $\vec{a}$.

Обозначение: $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$.

Разложение вектора по ортам координатных осей. Модуль вектора. Направляющие косинусы

Из теоремы о диагонали прямоугольного параллелепипеда следует:

Разложение вектора по ортам координатных осей. Модуль вектора. Направляющие косинусы

Из теоремы о диагонали прямоугольного параллелепипеда следует:

$$|\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2.$$

Разложение вектора по ортам координатных осей. Модуль вектора. Направляющие косинусы

Из теоремы о диагонали прямоугольного параллелепипеда следует:

$$|\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2.$$

Отсюда

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Разложение вектора по ортам координатных осей. Модуль вектора. Направляющие косинусы

Пусть углы вектора $\vec{a}$ с осями Ox, Oy, Oz соответственно равны α, β, γ.

Разложение вектора по ортам координатных осей. Модуль вектора. Направляющие косинусы

Пусть углы вектора $\vec{a}$ с осями Ox, Oy, Oz соответственно равны α, β, γ. По определению проекции вектора на ось имеем

$$a_x = |\vec{a}| \cdot \cos\alpha, a_y = |\vec{a}| \cdot \cos\beta, a_z = |\vec{a}| \cdot \cos\gamma.$$

Разложение вектора по ортам координатных осей. Модуль вектора. Направляющие косинусы

Пусть углы вектора $\vec{a}$ с осями Ox, Oy, Oz соответственно равны α, β, γ. По определению проекции вектора на ось имеем

$$a_x = |\vec{a}| \cdot \cos\alpha, a_y = |\vec{a}| \cdot \cos\beta, a_z = |\vec{a}| \cdot \cos\gamma.$$

Откуда

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

Разложение вектора по ортам координатных осей. Модуль вектора. Направляющие косинусы

Определение

Числа $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ называются **направляющими косинусами** вектора $\vec{a}$.

Разложение вектора по ортам координатных осей. Модуль вектора. Направляющие косинусы

Можно доказать, что

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

то есть сумма квадратов направляющих косинусов вектора равна единице.

Разложение вектора по ортам координатных осей. Модуль вектора. Направляющие косинусы

Можно доказать, что

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

то есть сумма квадратов направляющих косинусов вектора равна единице.

Итак, задав координаты вектора, всегда можно определить его модуль и направление, т.е. сам вектор.

Действия над векторами, заданными своими координатами

Действия над векторами, заданными своими координатами

Пусть векторы $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ заданы своими координатами или
$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$.

Действия над векторами, заданными своими координатами

Тогда:

Действия над векторами, заданными своими координатами

Тогда:

1. При сложении (вычитании) векторов их одноименные координаты складываются, то есть $\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$.

Действия над векторами, заданными своими координатами

Тогда:

1. При сложении (вычитании) векторов их одноименные координаты складываются, то есть $\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$.

2. При умножении вектора на скаляр координаты вектора умножаются на этот скаляр, то есть $\alpha \cdot \vec{a} = (\alpha \cdot a_x, \alpha \cdot a_y, \alpha \cdot a_z)$.

Действия над векторами, заданными своими координатами

Тогда:

3. Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны тогда и только тогда, когда равны их координаты.

Действия над векторами, заданными своими координатами

Тогда:

3. Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны тогда и только тогда, когда равны их координаты.

4. Проекции (координаты) коллинеарных векторов пропорциональны, т. е.

$$\vec{a} \| \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

Действия над векторами, заданными своими координатами

Пример:

Действия над векторами, заданными своими координатами

Пример: При каких значениях α и β векторы $\vec{a} = (-2, 3, \alpha)$ и $\vec{b} = (\beta, -6, 2)$ коллинеарны?

Действия над векторами, заданными своими координатами

Пример: При каких значениях α и β векторы $\vec{a} = (-2, 3, \alpha)$ и $\vec{b} = (\beta, -6, 2)$ коллинеарны?

Решение:

Действия над векторами, заданными своими координатами

Пример: При каких значениях α и β векторы $\vec{a} = (-2, 3, \alpha)$ и $\vec{b} = (\beta, -6, 2)$ коллинеарны?

Решение:

$\vec{a} || \vec{b} \Leftrightarrow \frac{-2}{\beta} = \frac{3}{-6} = \frac{\alpha}{2}$.

Действия над векторами, заданными своими координатами

Пример: При каких значениях α и β векторы $\vec{a} = (-2, 3, \alpha)$ и $\vec{b} = (\beta, -6, 2)$ коллинеарны?

Решение:

$\vec{a} || \vec{b} \Leftrightarrow \frac{-2}{\beta} = \frac{3}{-6} = \frac{\alpha}{2}$. Тогда $\alpha = -1, \beta = 4$.

Действия над векторами, заданными своими координатами

Тогда:

5. Координаты вектора равны разности соответствующих координат его конца и начала.

Действия над векторами, заданными своими координатами

Тогда:

5. Координаты вектора равны разности соответствующих координат его конца и начала. Пусть $A\,(x_1, y_1, z_1)$, $B\,(x_2, y_2, z_2)$, тогда

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Действия над векторами, заданными своими координатами

Пример:

Действия над векторами, заданными своими координатами

Пример: Найти длину вектора $\vec{a} = (2; 3; 6)$ и его орт.

Действия над векторами, заданными своими координатами

Пример: Найти длину вектора $\vec{a} = (2; 3; 6)$ и его орт.

Решение:

Действия над векторами, заданными своими координатами

Пример: Найти длину вектора $\vec{a} = (2;3;6)$ и его орт.

Решение:

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = 7, \ \overrightarrow{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = (\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}).$$