Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Аналитическая геометрия

Модуль 1. Матричная алгебра. Векторная алгебра

Лекция 1.1

к.ф.-м.н. Меньшова И.В.

Определение матрицы. Виды матриц

Определение

Числовой матрицей размера $m \times n$ (произносится «эм на эн») называется совокупность чисел, расположенных в виде таблицы, в которой имеется m строк и n столбцов. Составляющие матрицу числа называются ее **элементами**.

Способы записи матрицы:

Определение матрицы. Виды матриц

Способы записи матрицы:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

Определение матрицы. Виды матриц

Способы записи матрицы:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

Определение матрицы. Виды матриц

Способы записи матрицы:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Здесь a_{ij} - элемент матрицы, находящийся в строке под номером i и в столбце под номером j, где $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, т.е. $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$.

Здесь a_{ij} - элемент матрицы, находящийся в строке под номером i и в столбце под номером j, где $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, т.е. $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$.

Пример.

Здесь a_{ij} - элемент матрицы, находящийся в строке под номером i и в столбце под номером j, где $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, т.е. $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$.

Пример. Элемент a_{32} расположен в третьей строке и втором столбце.

Здесь a_{ij} - элемент матрицы, находящийся в строке под номером i и в столбце под номером j, где $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, т.е. $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$.

Пример. Элемент a_{32} расположен в третьей строке и втором столбце.

Используют и другие сокращенные обозначения:

Здесь a_{ij} - элемент матрицы, находящийся в строке под номером i и в столбце под номером j, где $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, т.е. $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$.

Пример. Элемент a_{32} расположен в третьей строке и втором столбце.

Используют и другие сокращенные обозначения: (a_{ij}), $[a_{ij}]$, $\|a_{ij}\|$.

Определение матрицы. Виды матриц

Матрицу как единый объект обозначают прописными латинскими буквами $A, B, C, \ldots$, иногда снизу подписывая их размерность, например, $A_{m\times n}$.

Пример.

Пример. $A_{2\times 4} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

Пример. $A_{2\times 4} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ - матрица A имеет размер 2×4, т.к. она содержит 2 строчки и 4 столбца.

Определение матрицы. Виды матриц

Рассмотрим некоторые виды матриц.

Рассмотрим некоторые виды матриц.

Определение

Матрица размера $1 \times n$, состоящая из одной строки, называется **матрицей-строкой** или **строчной матрицей**.

Рассмотрим некоторые виды матриц.

Определение

Матрица размера $1 \times n$, состоящая из одной строки, называется **матрицей-строкой** или **строчной матрицей**. Она имеет вид

$$A = \left(a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}\right).$$

Рассмотрим некоторые виды матриц.

Определение

Матрица размера $1 \times n$, состоящая из одной строки, называется **матрицей-строкой** или **строчной матрицей**. Она имеет вид

$$A = (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}) .$$

Число элементов в матрице-строке есть ее **длина**.

Определение

Матрица размера $m \times 1$, состоящая из одного столбца, называется **матрицей-столбцом** или **стролбцевой матрицей.**

Определение

Матрица размера $m \times 1$, состоящая из одного столбца, называется **матрицей-столбцом** или **стролбцевой матрицей.** Ее вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \cdots\cdots \\ a_{1n} \end{pmatrix}.$$

Определение

Матрица размера $m \times 1$, состоящая из одного столбца, называется **матрицей-столбцом** или **стролбцевой матрицей.** Ее вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \ldots\ldots \\ a_{1n} \end{pmatrix}.$$

Число элементов в ней есть ее **высота**.

Определение матрицы. Виды матриц

По размерности все матрицы делятся на **квадратные** $(m = n)$ и **прямоугольные** $(m \neq n)$.

Пример.

Пример. Матрица $A_{3\times 1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$ - прямоугольная матрица-столбец размера 3×1, *Пример.* Матрица $A_{3\times1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$ - прямоугольная матрица-столбец размера 3×1, а матрица $B_{3\times3} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ - квадратная матрица размера 3×3.

Определение матрицы. Виды матриц

Определение

Число строк и столбцов квадратной матрицы называется ее **порядком**.

Пример.

Пример. Матрица $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ - матрица n-го (произносится «энного») порядка,

Определение матрицы. Виды матриц

Пример. Матрица $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ - матрица n-го (произносится «энного») порядка, а матрица $B_{3\times3} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ - матрица третьего порядка.

Определение матрицы. Виды матриц

Определение

В квадратной матрице элементы $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ образуют **главную диагональ**, а элементы $a_{1n}, a_{2,n-1}, ..., a_{n1}$ - **побочную**.

Определение

Квадратная матрица порядка n, у которой все элементы, не стоящие на главной диагонали, равны нулю, называется **диагональной**:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

.

Определение матрицы. Виды матриц

Определение

Единичной матрицей называется диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице. Единичную матрицу обозначают буквой E:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Определение

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется **нулевой** и обозначается латинской буквой O.

Определение

Квадратная матрица, все элементы которой расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю, называется **треугольной**.

Причем, матрица вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется **верхней треугольной**,

а матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- **нижней треугольной.**

Определение

Прямоугольная матрица вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

у которой элементы, расположенные под главной диагональю, равны нулю, называется **верхней трапециевидной**.

Важную роль играют **ступенчатые матрицы** или **матрицы ступенчатого вида**.

Определение

Матрица называется **ступенчатой**, если для любой ее строки выполнено следующее условие: под первым слева ненулевым элементом строки и предшествующими ему нулевыми элементами этой строки все элементы матрицы равны нулю.

Например,

Определение матрицы. Виды матриц

Например,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

Например,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Определение матрицы. Виды матриц

Например,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 9 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Линейные операции над матрицами

1. Сравнение матриц

1. Сравнение матриц

Определение
Две матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ называются **равными**, если они имеют одинаковые размерности и элементы этих матриц, стоящие на одних и тех же местах совпадают, т.е. соответствующие элементы $(a_{ij}) = (b_{ij})$.

2. Сложение и вычитание матриц

Линейные операции над матрицами

2. Сложение и вычитание матриц

Операция сложения вводится только для матриц одинаковой размерности.

2. Сложение и вычитание матриц

Операция сложения вводится только для матриц одинаковой размерности.

Определение

Суммой двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ называется такая матрица $C = (c_{ij})$, что каждый ее элемент есть сумма соответствующих элементов матриц A и B, т.е. $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Определение

Разностью двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ называется такая матрица $C = (c_{ij})$, что $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

Линейные операции над матрицами

Пример .

Пример .Пусть даны матрицы

Линейные операции над матрицами

Пример .Пусть даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix},$$

Пример .Пусть даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Линейные операции над матрицами

Пример .Пусть даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Тогда

Линейные операции над матрицами

Пример .Пусть даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A + B =$$

Пример .Пусть даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+7 & 0+2 & 8+(-3) \\ 4+(-4) & -4+3 & 1+5 \end{pmatrix} =$$

Линейные операции над матрицами

Пример .Пусть даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+7 & 0+2 & 8+(-3) \\ 4+(-4) & -4+3 & 1+5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix},$$

Линейные операции над матрицами

Пример .Пусть даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Линейные операции над матрицами

Пример .Пусть даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$A - B =$$

Пример .Пусть даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 2-7 & 0-2 & 8-(-3) \\ 4-(-4) & -4-3 & 1-5 \end{pmatrix} =$$

Пример .Пусть даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 2-7 & 0-2 & 8-(-3) \\ 4-(-4) & -4-3 & 1-5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & -2 & 11 \\ 8 & -7 & -4 \end{pmatrix}.$$

3. Умножение матрицы на число

3. Умножение матрицы на число

Определение

Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ **на число** $\alpha \neq 0$ называется такая матрица $B = (b_{ij})$, что каждый ее элемент есть произведение соответствующих элементов матрицы A на число α, т.е. $b_{ij} = \alpha a_{ij}$.

Пример.

Пример. Произведением матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & \sqrt{2} & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Пример. Произведением матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & \sqrt{2} & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

на число $\alpha = 4$

Пример. Произведением матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & \sqrt{2} & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

на число $\alpha = 4$ будет матрица

Линейные операции над матрицами

B

$$B = 4 \cdot A$$

Линейные операции над матрицами

$$B = 4 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 & 3 \cdot 4 & -2 \cdot 4 \\ 0 \cdot 4 & \sqrt{2} \cdot 4 & 4 \cdot 4 \\ 2 \cdot 4 & 1 \cdot 4 & 1 \cdot 4 \end{pmatrix} =$$

Линейные операции над матрицами

$$B = 4 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 & 3 \cdot 4 & -2 \cdot 4 \\ 0 \cdot 4 & \sqrt{2} \cdot 4 & 4 \cdot 4 \\ 2 \cdot 4 & 1 \cdot 4 & 1 \cdot 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 12 & -8 \\ 0 & 4\sqrt{2} & 16 \\ 8 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

.

Определение

Матрица $-A = -1 \cdot A$ называется **противоположной** матрице A.

Замечание.

Замечание. Разность матриц A и B можно рассматривать, как сумму матрицы A и матрицы, противоположной к матрице B, т.е. $A - B = A + (-B)$.

Операции сложения матриц и умножения матрицы на число обладают *свойствами*:

Операции сложения матриц и умножения матрицы на число обладают *свойствами*:

1. $A + B = B + A$;

Линейные операции над матрицами

Операции сложения матриц и умножения матрицы на число обладают *свойствами*:

1. $A + B = B + A$;

2. $A + (B + C) = (A + B) + C$;

Операции сложения матриц и умножения матрицы на число обладают *свойствами*:

1. $A + B = B + A$;
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$;
3. $A + O = A$;

Линейные операции над матрицами

Операции сложения матриц и умножения матрицы на число обладают *свойствами*:

1. $A + B = B + A$;
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$;
3. $A + O = A$;
4. $A - A = O$;

Линейные операции над матрицами

Операции сложения матриц и умножения матрицы на число обладают *свойствами*:

1. $A + B = B + A$;
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$;
3. $A + O = A$;
4. $A - A = O$;
5. $1 \cdot A = A$;

Линейные операции над матрицами

Операции сложения матриц и умножения матрицы на число обладают *свойствами*:

1. $A + B = B + A$;
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$;
3. $A + O = A$;
4. $A - A = O$;
5. $1 \cdot A = A$;
6. $\alpha (A + B) = \alpha A + \alpha B$;

Линейные операции над матрицами

Операции сложения матриц и умножения матрицы на число обладают *свойствами*:

1. $A + B = B + A$;
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$;
3. $A + O = A$;
4. $A - A = O$;
5. $1 \cdot A = A$;
6. $\alpha\,(A + B) = \alpha A + \alpha B$;
7. $(\alpha + \beta)\,A = \alpha A + \beta A$;

Линейные операции над матрицами

Операции сложения матриц и умножения матрицы на число обладают *свойствами*:

1. $A + B = B + A$;
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$;
3. $A + O = A$;
4. $A - A = O$;
5. $1 \cdot A = A$;
6. $\alpha\,(A + B) = \alpha A + \alpha B$;
7. $(\alpha + \beta)\,A = \alpha A + \beta A$;
8. $\alpha\,(\beta A) = (\alpha\beta)\,A$.

Нелинейные операции над матрицами

1. Произведение матриц

1. Произведение матриц

Определение

Матрица A называется **согласованной** с матрицей B, если число столбцов матрицы A совпадает с числом строк матрицы B.

Пример.

Пример. Из трех матриц

Пример. Из трех матриц

$$A_{2\times 4} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & -1 & 4 \\ 5 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Нелинейные операции над матрицами

Пример. Из трех матриц

$$A_{2\times4} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & -1 & 4 \\ 5 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B_{2\times2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$

Нелинейные операции над матрицами

Пример. Из трех матриц

$$A_{2\times 4} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & -1 & 4 \\ 5 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$C_{4\times 2} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

согласованными являются:

Нелинейные операции над матрицами

согласованными являются:A с C,

Нелинейные операции над матрицами

согласованными являются:A с C, B с A,

Нелинейные операции над матрицами

согласованными являются: A с C, B с A, C с B,

Нелинейные операции над матрицами

согласованными являются: A с C, B с A, C с B, C с A.

Нелинейные операции над матрицами

согласованными являются:A с C, B с A, C с B, C с A. Матрица A не согласована с B,

Нелинейные операции над матрицами

согласованными являются: A с C, B с A, C с B, C с A. Матрица A не согласована с B, матрица B не согласована с матрицей C.

Нелинейные операции над матрицами

Операция умножения двух матриц имеет место только для случая согласованных матриц.

Нелинейные операции над матрицами

Операция умножения двух матриц имеет место только для случая согласованных матриц. В частности, операция умножения матриц всегда выполнима, если оба множителя являются квадратными матрицами.

Определение

Произведением матрицы $A_{m\times n} = (a_{ij})$ **на матрицу** $B_{n\times k} = (b_{ij})$ называется матрица $C_{m\times k} = (c_{ij}) = A \cdot B$, каждый элемент которой равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы j-ого столбца матрицы B, т.е.

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} b_{rj} \ (i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, k}).$$

Получение элемента c_{ij} схематически изображается так:

Нелинейные операции над матрицами

Получение элемента c_{ij} схематически изображается так:

$$\begin{array}{cc} i & \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \\ j \end{array} = \begin{array}{cc} i & \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \otimes & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \\ & j \end{array}$$

Нелинейные операции над матрицами

Пример.

Пример. Найти $A \cdot B$ и $B \cdot A$ (если они существуют):

Пример. Найти $A \cdot B$ и $B \cdot A$ (если они существуют):

а)

Пример. Найти $A \cdot B$ и $B \cdot A$ (если они существуют):

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,

Пример. Найти $A \cdot B$ и $B \cdot A$ (если они существуют):

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Пример. Найти $A \cdot B$ и $B \cdot A$ (если они существуют):

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Матрицы $A_{2\times 2}$ и $B_{2\times 3}$ являются согласованными. В результате умножения A на B получится матрица размера 2×3:

Нелинейные операции над матрицами

$A \cdot B =$

Нелинейные операции над матрицами

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} =$$

Нелинейные операции над матрицами

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нелинейные операции над матрицами

Матрицы $B_{2\times 3}$ и $A_{2\times 2}$ не являются согласованными, поэтому произведение $B \cdot A$ не существует.

Нелинейные операции над матрицами

б)

Нелинейные операции над матрицами

б) $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, б) $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$

Нелинейные операции над матрицами

б) $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$

В результате умножения A на B получится матрица размера 3×3.

Нелинейные операции над матрицами

$A \cdot B =$

Нелинейные операции над матрицами

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix} =$$

Нелинейные операции над матрицами

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4 \cdot 3 + 0 \cdot 2 & -4 \cdot 0 + 0 \cdot (-4) & -4 \cdot (-1) + 0 \cdot 6 \\ 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-4) & 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 6 \\ -1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 & -1 \cdot 0 + 3 \cdot (-4) & -1 \cdot (-1) + 3 \cdot 6 \end{pmatrix} =$$

Нелинейные операции над матрицами

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4\cdot 3 + 0\cdot 2 & -4\cdot 0 + 0\cdot(-4) & -4\cdot(-1) + 0\cdot 6 \\ 2\cdot 3 + 1\cdot 2 & 2\cdot 0 + 1\cdot(-4) & 2\cdot(-1) + 1\cdot 6 \\ -1\cdot 3 + 3\cdot 2 & -1\cdot 0 + 3\cdot(-4) & -1\cdot(-1) + 3\cdot 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -12 & 0 & 4 \\ 8 & -4 & 4 \\ 3 & -12 & 19 \end{pmatrix}.$$

В результате умножения B на A получится матрица размера 2×2.

В результате умножения B на A получится матрица размера 2×2.

$B \cdot A =$

В результате умножения B на A получится матрица размера 2×2.

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} =$$

Нелинейные операции над матрицами

В результате умножения B на A получится матрица размера 2×2.

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3\cdot(-4)+0\cdot 2+(-1)\cdot(-1) & 3\cdot 0+0\cdot 1+(-1)\cdot 3 \\ 2\cdot(-4)+(-4)\cdot 2+6\cdot(-1) & 2\cdot 0+(-4)\cdot 1+6\cdot 3 \end{pmatrix} =$$

В результате умножения B на A получится матрица размера 2×2.

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3\cdot(-4)+0\cdot 2+(-1)\cdot(-1) & 3\cdot 0+0\cdot 1+(-1)\cdot 3 \\ 2\cdot(-4)+(-4)\cdot 2+6\cdot(-1) & 2\cdot 0+(-4)\cdot 1+6\cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -11 & -3 \\ -22 & 14 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что, вообще говоря, $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Отметим, что, вообще говоря, $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,

Отметим, что, вообще говоря, $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,

$A \cdot B =$

Нелинейные операции над матрицами

Отметим, что, вообще говоря, $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} =$

Отметим, что, вообще говоря, $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -6 & -2 \end{pmatrix},$$

Нелинейные операции над матрицами

Отметим, что, вообще говоря, $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -6 & -2 \end{pmatrix},$$

$$B \cdot A =$$

Нелинейные операции над матрицами

Отметим, что, вообще говоря, $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -6 & -2 \end{pmatrix},$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} =$$

Нелинейные операции над матрицами

Отметим, что, вообще говоря, $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -6 & -2 \end{pmatrix},$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Нелинейные операции над матрицами

Отметим, что, вообще говоря, $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -6 & -2 \end{pmatrix},$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Определение

Матрицы A и B называются **перестановочными** или **коммутирующими**, если

$$A \cdot B = B \cdot A.$$

Операция умножения матриц обладает следующими *свойствами*:

Операция умножения матриц обладает следующими *свойствами*:

1. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$;

Нелинейные операции над матрицами

Операция умножения матриц обладает следующими *свойствами*:

1. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$;
2. $A \cdot (B + C) = AB + AC$;

Нелинейные операции над матрицами

Операция умножения матриц обладает следующими *свойствами*:

1. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$;
2. $A \cdot (B + C) = AB + AC$;
3. $(A + B) \cdot C = AC + BC$;

Операция умножения матриц обладает следующими *свойствами*:

1. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$;
2. $A \cdot (B + C) = AB + AC$;
3. $(A + B) \cdot C = AC + BC$;
4. $(\alpha A) \cdot B = \alpha (A \cdot B)$;

Нелинейные операции над матрицами

Операция умножения матриц обладает следующими *свойствами*:

1. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$;
2. $A \cdot (B + C) = AB + AC$;
3. $(A + B) \cdot C = AC + BC$;
4. $(\alpha A) \cdot B = \alpha\,(A \cdot B)$;
5. $A \cdot E = E \cdot A = A$, где A и E – квадратные матрицы n-го порядка.

Замечание. Операции деления матриц не существует.

2. Возведение матрицы в степень

2. Возведение матрицы в степень

Операция возведения в степень определяется только для квадратных матриц.

2. Возведение матрицы в степень

Операция возведения в степень определяется только для квадратных матриц.

Определение

Пусть $n \in N$. Тогда **n-ой степенью матрицы** A называется матрица A^n, равная $A^n = A \cdot A \cdot ... \cdot A$ (n раз).

Введем также нулевую степень квадратной матрицы, полагая $A^0 = E$, где E – единичная матрица того же порядка.

Пример.

Нелинейные операции над матрицами

Пример. Пусть дана квадратная матрица второго порядка

Пример. Пусть дана квадратная матрица второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

Пример. Пусть дана квадратная матрица второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^2 =$$

Пример. Пусть дана квадратная матрица второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

Нелинейные операции над матрицами

Пример. Пусть дана квадратная матрица второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \cdot 4 + (-1) \cdot (-2) & 4 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 \\ -2 \cdot 4 + 1 \cdot (-2) & -2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 18 & -5 \\ -10 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Транспонирование

3. Транспонирование

Определение

Матрица, полученная из данной матрицы A заменой каждой ее строки столбцом с соответствующим номером, называется **транспонированной** к A и обозначается A^T.

Пример.

Пример. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

транспонированной будет

Пример. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

транспонированной будет $A^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$,

Нелинейные операции над матрицами

Пример. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ транспонированной будет $A^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, а для $B = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix}$

Пример. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ транспонированной будет $A^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, а для $B = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix}$ - $B^T = \begin{pmatrix} -7 & 2 \end{pmatrix}$.

Определение

Операция нахождения транспонированной матрицы называется **транспонированием матрицы.**

Операция транспонирования матрицы обладает следующими свойствами:

Нелинейные операции над матрицами

Операция транспонирования матрицы обладает следующими свойствами:

1. $(A^T)^T = A$;

Операция транспонирования матрицы обладает следующими свойствами:

1. $\left(A^T\right)^T = A$;
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$;

Нелинейные операции над матрицами

Операция транспонирования матрицы обладает следующими свойствами:

1. $(A^T)^T = A$;
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$;
3. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$;

Операция транспонирования матрицы обладает следующими свойствами:

1. $(A^T)^T = A$;
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$;
3. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$;
4. $(\alpha A)^T = \alpha \cdot A^T$.

Операция транспонирования матрицы обладает следующими свойствами:

1. $(A^T)^T = A$;
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$;
3. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$;
4. $(\alpha A)^T = \alpha \cdot A^T$.

Замечание.

Замечание. При транспонировании квадратной матрицы все элементы главной диагонали остаются на своих местах, а остальные симметрично отражаются относительно главной диагонали.

Определение
Квадратная матрица A называется **симметрической**, если она не изменяется в результате транспонирования, т.е. $A^T = A$.

Нелинейные операции над матрицами

Например, матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Приведение матрицы к ступенчатому виду

4. Приведение матрицы к ступенчатому виду

Далее будем называть строки или столбцы матрицы ее рядами.

Определение

Следующие преобразования матриц будем называть **элементарными**:

Определение

Следующие преобразования матриц будем называть **элементарными**:

1) перестановка местами двух параллельных рядов матрицы;

Определение

Следующие преобразования матриц будем называть **элементарными**:

1) перестановка местами двух параллельных рядов матрицы;

2) умножение всех элементов ряда на число, отличное от нуля;

Определение
Следующие преобразования матриц будем называть **элементарными**:
3) прибавление ко всем элементам ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на одно и то же число.

Определение

Две матрицы A и B называются **эквивалентными**, если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований.

Нелинейные операции над матрицами

Определение

Две матрицы A и B называются **эквивалентными**, если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований.

Эквивалентность двух матриц обозначают: $A \sim B$.

Нелинейные операции над матрицами

С помощью элементарных преобразований любую матрицу можно привести к ступенчатому виду.

С помощью элементарных преобразований любую матрицу можно привести к ступенчатому виду.

Пример.

С помощью элементарных преобразований любую матрицу можно привести к ступенчатому виду.

Пример. Привести матрицу к ступенчатому виду

С помощью элементарных преобразований любую матрицу можно привести к ступенчатому виду.

Пример. Привести матрицу к ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 0 \\ -5 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$