Интегралы и дифференциальные уравнения

Модуль 1. Неопределенный интеграл

Лекция 1.2

Аннотация

Рациональные дроби. Разложение правильной рациональной дроби на сумму простейших. Интегрирование простейших дробей. Интегрирование правильных и неправильных рациональных дробей.

Определение (Моном)

Мономами называют перечисленные ниже функции:

1. константы; степень такого монома считают равной 0.
2. произведения натуральных степеней одной переменной и констант $(2x,\ x^2,\ 5x^3, \ldots)$; степенью такого монома называют показатель степени переменной.
3. произведения натуральных степеней нескольких переменных и констант $(xy,\ 3x^2yz,\ 8xyz^3, \ldots)$; степенью такого монома называют сумму показателей степеней всех переменных, входящих в моном.

Определение (Полином)

Полином – это функция, представляющая собой сумму конечного числа мономов. Степенью полинома называют наибольшую степень среди степеней мономов, входящих в полином.

Таблица 1. Примеры мономов; n — степень монома.

Мономы	$9,\ n=0$	$x,\ n=1$	$9x,\ n=1$	$x^2y^5z,\ n=8$	$x_1^2x_2^7x_3^2x_4x_5^3,\ n=15$
НЕ мономы	$x^{-1}=\frac{1}{x}$	$x^{-5}=\frac{1}{x^5}$	$x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$	$x^{\frac{1}{7}}=\sqrt[7]{x}$	e^{6x}

Таблица 2. Примеры полиномов; n — степень полинома.

Полиномы	$x+9,\ n=1$	$3x^2+2x-1,\ n=2$	$9x^3-x-7,\ n=3$	$x^2y^5z-xy^3z^{10},\ n=14$
НЕ полиномы	$x+\frac{1}{x}$	$x^2\ln(x)-\frac{3}{x^5}$	$\sqrt{x}-5\sqrt[7]{x}$	$2x^2-3x+\mathrm{e}^{6x}$

Определение (Рациональная функция)

Рациональной функцией называется отношение двух полиномов.

- Рациональная функция называется *правильной*, если степень полинома, стоящего в числителе строго меньше степени полинома, стоящего в знаменателе.

- Рациональная функция называется *неправильной*, если степень полинома, стоящего в числителе больше или равна степени полинома, стоящего в знаменателе.

Примеры

1. Правильные рациональные функции:

$$f(x) = \frac{3x-5}{x^3-x+1}, \quad g(x) = \frac{x^2-3x+2}{(x-9)^4}$$

2. Неправильные рациональные функции:

$$h(x) = \frac{3x^2-x+10}{(x+1)^2}, \quad j(x) = \frac{x^6-5x^5+5x^4+10x^3-1}{x+3}$$

Интегрирование различных рациональных функций.

1. Интегралы вида $\int \frac{adx}{(kx+b)^n}$, $a, k, b = \mathrm{const}$, $n \geqslant 1$, вычисляются с помощью замены $t = kx + b$.

Примеры

1. $\int \frac{3dx}{7x-5} = 3\int \frac{dx}{7x-5} = \left| \begin{array}{c} t = 7x-5 \\ dt = 7dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{7} \end{array} \right| = \frac{3}{7}\int \frac{dt}{t} = \frac{3}{7}\ln|t| + C = \frac{3}{7}\ln|7x-5| + C,$
$C = \mathrm{const}$

2. $\int \frac{3dx}{(7x-5)^3} = \frac{3}{7}\int \frac{dt}{t^3} = \frac{3}{7}\cdot\frac{t^{-2}}{(-2)} = -\frac{3}{14(7x-5)^2} + C, \ \ C = \mathrm{const}$

2. Интегралы вида $\int \frac{P(x)}{(x-a_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-a_n)^{k_n}}dx$, где $a_1, \ldots, a_n = \mathrm{const}$, $k_1 \geqslant 1, \ldots, k_n \geqslant 1$, $P(x)$ – полином, степень которого меньше суммы $k_1 + \ldots + k_n$, вычисляются с помощью разложения подынтегральной функции на сумму **простейших дробей**:

$$\frac{P(x)}{(x-a_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-a_n)^{k_n}} = \frac{A_{11}}{x-a_1} + \ldots + \frac{A_{1k_1}}{(x-a_1)^{k_1}} + \ldots + \frac{A_{n1}}{x-a_n} + \ldots + \frac{A_{nk_n}}{(x-a_n)^{k_n}} \qquad (1.2.1)$$

Каждой скобке $(x-a_i)^{k_i}$, $i = 1, \ldots, n$, соответствуют k_i дробей в разложении. В формуле (1.2.1) $A_{11}, \ldots, A_{nk_n}$ – числа, которые определяются **методом неопределенных коэффициентов** или **методом частных значений**.

Примеры

1. Вычислим интеграл $\int \frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx$. Разложим подынтегральную функцию на сумму простейших дробей:

$$\begin{aligned}\frac{x^2+1}{\cancel{(x-1)(x-2)(x-3)}} &= \frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{x-2}+\frac{A_3}{x-3} = \\ &= \frac{A_1(x-2)(x-3)+A_2(x-1)(x-3)+A_3(x-1)(x-2)}{\cancel{(x-1)(x-2)(x-3)}}\end{aligned} \tag{1.2.2}$$

У первой и последней дробей знаменатели одинаковые, следовательно, числители должны быть равны:

$$x^2+1 = A_1(x-2)(x-3)+A_2(x-1)(x-3)+A_3(x-1)(x-2) \tag{1.2.3}$$

Для нахождения чисел A_1, A_2, A_3 воспользуемся **методом частных значений**. Для того, чтобы найти A_1, в правой части формулы (1.2.3) нужно избавиться от второго и третьего слагаемых; этого можно добиться, подставив в правую и левую части формулы (1.2.3) $x = 1$:

$$1^2+1 = A_1(1-2)(1-3)+A_2\cdot 0+A_3\cdot 0 \Longrightarrow 2 = A_1\cdot 2 \Longrightarrow A_1 = 1$$

Для того, чтобы найти A_2, подставим в правую и левую части формулы (1.2.3) $x = 2$ и найдем, что $A_2 = -5$; после подстановки $x = 3$ мы обнаружим, что $A_3 = 5$. Подставляя найденные значения A_1, A_2, A_3 в (1.2.2), получим:

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-1}-\frac{5}{x-2}+\frac{5}{x-3}$$

Вернемся к интегралу:

$$\int \tfrac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx = \int\left(\tfrac{1}{x-1}-\tfrac{5}{x-2}+\tfrac{5}{x-3}\right)dx =$$
$$= \ln|x-1|-5\ln|x-2|+5\ln|x-3|+\ln|C| = \ln\left|\tfrac{C(x-1)(x-3)^5}{(x-2)^5}\right|, \quad C = \mathrm{const}$$

2. Вычислим интеграл $\int \frac{x}{(x+1)^2(x+2)}dx$. Разложим подынтегральную функцию на сумму простейших дробей:

$$\frac{x}{\cancel{(x+1)^2(x+2)}} = \frac{A_{11}}{x+1}+\frac{A_{12}}{(x+1)^2}+\frac{A_{21}}{x+2} = \frac{A_{11}(x+1)(x+2)+A_{12}(x+2)+A_{21}(x+1)^2}{\cancel{(x+1)^2(x+2)}} \tag{1.2.4}$$

Сократим знаменатели первой и последней дробей и приравняем числители:

$$x = A_{11}(x+1)(x+2)+A_{12}(x+2)+A_{21}(x+1)^2 \tag{1.2.5}$$

Воспользуемся **методом неопределенных коэффициентов**. Для этого в правой части равенства (1.2.5) раскроем скобки и сгруппируем члены с одинаковыми степенями (приведем подобные слагаемые):

$$x = (A_{11} + A_{21})x^2 + (3A_{11} + A_{12} + 2A_{21})x + 2A_{11} + 2A_{12} + A_{21} \tag{1.2.6}$$

Теперь приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x в правой и левой частях равенства (1.2.6); отсутствие x^2 в левой части этого равенства говорит о том, что коэффициент перед x^2 равен нулю. Получаем систему уравнений и решаем ее:

$$\begin{cases} A_{11} + A_{21} = 0 \\ 3A_{11} + A_{12} + 2A_{21} = 1 \\ 2A_{11} + 2A_{12} + A_{21} = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A_{21} = -A_{11} \\ 3A_{11} + A_{12} - 2A_{11} = 1 \\ 2A_{11} + 2A_{12} - A_{11} = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A_{12} = -1 \\ A_{11} = 2 \\ A_{21} = -2 \end{cases} \tag{1.2.7}$$

Подставим найденные значения A_{11}, A_{12}, A_{21} в (1.2.4):

$$\frac{x}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{2}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{x+2}$$

Вернемся к интегралу:

$$\int \tfrac{x}{(x+1)^2(x+2)}dx = \int \left(\tfrac{2}{x+1} - \tfrac{1}{(x+1)^2} - \tfrac{2}{x+2}\right) dx =$$
$$= 2\ln|x+1| + \tfrac{1}{x+1} - 2\ln|x+2| + \ln|C| = \ln\left(\tfrac{|C|(x+1)^2}{(x+2)^2}\right) + \tfrac{1}{x+1}, \quad C = \text{const}$$

3. Интегралы вида $\int \frac{kx+h}{ax^2+bx+c}dx,\ \ k, h, a, b, c = \text{const}$, у которых дискриминант знаменателя отрицательный $(b^2 - 4ac < 0)$, вычисляются путем выделения полного квадрата в знаменателе:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}} \tag{1.2.8}$$

и последующей замены $t = x + \frac{b}{2a}$.

Примеры

Вычислим интеграл $\int \frac{6x-1}{x^2+2x+2}dx$.

$$\int \tfrac{6x-1}{x^2+2x+2}dx = \left| \begin{array}{c} \text{в этом случае } a = 1,\ b = 2,\ c = 2 \\ \Downarrow \\ x^2 + 2x + 2 = 1\cdot\left(x + \frac{2}{2}\right)^2 + 2 - \frac{4}{4} = (x+1)^2 + 1 \end{array} \right| =$$

$$= \int \tfrac{6x-1}{(x+1)^2+1}dx = \left| \begin{array}{c} t = x+1 \Rightarrow x = t-1 \Rightarrow 6x-1 = 6t-7 \\ dt = dx \end{array} \right| = \int \tfrac{6t-7}{t^2+1}dt =$$

$$= 6\int \tfrac{tdt}{t^2+1} - 7\int \tfrac{dt}{t^2+1}$$

Второй интеграл является табличным, а в первом сделаем замену: $t^2+1=u \Rightarrow 2tdt=du \Rightarrow tdt=\frac{1}{2}du$; тогда:

$$6\int\frac{tdt}{t^2+1}=6\cdot\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}=3\ln|u|+\ln|C|=\ln\big(|C|(t^2+1)^3\big),\quad C=\mathrm{const}$$

Следовательно,

$$6\int\frac{tdt}{t^2+1}-7\int\frac{dt}{t^2+1}=\ln\big(|C|(t^2+1)^3\big)-7\,\mathrm{arctg}(t)$$

Делая обратную замену, получим ответ:

$$\int\frac{6x-1}{x^2+2x+2}dx=\ln\Big[|C|((x+1)^2+1)^3\Big]-7\,\mathrm{arctg}(x+1),\quad C=\mathrm{const}$$

4. Интегралы вида $\int\frac{kx+h}{ax^2+bx+c}dx,\ k,h,a,b,c=\mathrm{const}$, у которых дискриминант знаменателя положительный ($b^2-4ac>0$), вычисляются путем разложения знаменателя на множители:

$$\boxed{ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),\quad \text{где } x_1,x_2\ -\ \text{корни уравнения } ax^2+bx+c=0} \tag{1.2.9}$$

Примеры

Вычислим интеграл $\int\frac{4x+5}{x^2-4x+3}dx$. Найдем корни уравнения $x^2-4x+3=0:\ \ x_1=1,\ x_2=3$. Следовательно, $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$. Тогда:

$$\frac{4x+5}{x^2-4x+3}=\frac{4x+5}{\cancel{(x-1)(x-3)}}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{x-3}=\frac{A_1(x-3)+A_2(x-1)}{\cancel{(x-1)(x-3)}}$$

Приравниваем числители:

$$4x+5=A_1(x-3)+A_2(x-1) \tag{1.2.10}$$

Для нахождения чисел A_1,A_2 воспользуемся **методом частных значений**. Сначала подставим в правую и левую части (1.2.10) $x=1$ и найдем A_1:

$$4\cdot1+5=A_1(1-3)\iff 9=-2A_1\iff A_1=-\frac{9}{2}$$

Подставляя в (1.2.10) $x=3$ найдем, что $A_2=\frac{17}{2}$. Тогда

$$\frac{4x+5}{x^2-4x+3}=\frac{-\frac{9}{2}}{x-1}+\frac{\frac{17}{2}}{x-3}\Longrightarrow\int\frac{4x+5}{x^2-4x+3}dx=\int\left(\frac{-\frac{9}{2}}{x-1}+\frac{\frac{17}{2}}{x-3}\right)dx=$$

$$=-\frac{9}{2}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{17}{2}\int\frac{dx}{x-3}=-\frac{9}{2}\ln|x-1|+\frac{17}{2}\ln|x-3|+C,\quad C=\mathrm{const}$$

5. Интегралы вида $\int\frac{P(x)}{(x-q)^n(ax^2+bx+c)}dx$, у которых $q,a,b,c=\mathrm{const},\ n\geqslant1,\ P(x)$ – полином, степень которого меньше суммы $n+2$ и дискриминант полинома ax^2+bx+c отрицательный ($b^2-4ac<0$), вычисляются с помощью разложения подынтегральной функции на сумму простейших дробей:

$$\boxed{\frac{P(x)}{(x-q)^n(ax^2+bx+c)}=\frac{A_{11}}{x-q}+\ldots+\frac{A_{1n}}{(x-q)^n}+\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}} \tag{1.2.11}$$

Примеры

Вычислим интеграл $\int \frac{x^2+10x-10}{x(x^2+2x+2)}dx$. Разложим подынтегральную функцию на сумму простейших дробей:

$$\frac{x^2+10x-10}{\cancel{x(x^2+2x+2)}} = \frac{A}{x} + \frac{Mx+N}{x^2+2x+2} = \frac{A(x^2+2x+2)+(Mx+N)x}{\cancel{x(x^2+2x+2)}} \tag{1.2.12}$$

Приравняем числители:

$$x^2+10x-10 = A(x^2+2x+2)+(Mx+N)x$$

В правой части раскроем скобки и приведем подобные слагаемые:

$$x^2+10x-10 = (A+M)x^2+(2A+N)x+2A$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x и решим получившуюся систему уравнений:

$$\begin{cases} A+M=1 \\ 2A+N=10 \\ 2A=-10 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A=-5 \\ M=6 \\ N=20 \end{cases}$$

Подставим найденные числа A, M, N в (1.2.12):

$$\frac{x^2+10x-10}{x(x^2+2x+2)} = -\frac{5}{x} + \frac{6x+20}{x^2+2x+2}$$

Вернемся к интегралу:

$$\int \frac{x^2+10x-10}{x(x^2+2x+2)}dx = \int \left(-\frac{5}{x} + \frac{6x+20}{x^2+2x+2}\right)dx = -5\int\frac{dx}{x} + \int\frac{6x+20}{x^2+2x+2}dx \tag{1.2.13}$$

Первый интеграл является табличным, а второй вычисляется в полной аналогии с примером из пункта 3:

$$\int \tfrac{6x+20}{x^2+2x+2}dx = \int \tfrac{6x+20}{(x+1)^2+1}dx = \left| \begin{matrix} t=x+1 \Rightarrow x=t-1 \Rightarrow 6x+20=6t+14 \\ dt=dx \end{matrix} \right| = \int \tfrac{6t+14}{t^2+1}dt =$$

$$= 6\int\tfrac{tdt}{t^2+1} + 14\int\tfrac{dt}{t^2+1} = \left| \begin{matrix} \text{в первом интеграле сделаем замену:} \\ t^2+1=u \Rightarrow 2tdt=du \Rightarrow tdt=\frac{1}{2}du \end{matrix} \right| = 3\int\tfrac{du}{u} + 14\int\tfrac{dt}{t^2+1} =$$

$$= 3\ln|u| + 14\,\mathrm{arctg}(t) + \ln|C| = \ln\Big[|C|((x+1)^2+1)^3\Big] + 14\,\mathrm{arctg}(x+1)$$

Подставляя полученный результат в равенство (1.2.13), получим ответ:

$$\int\frac{x^2+10x-10}{x(x^2+2x+2)}dx = -5\ln|x| + \ln\Big[|C|((x+1)^2+1)^3\Big] + 14\,\mathrm{arctg}(x+1) =$$

$$= \ln\left[\frac{|C|((x+1)^2+1)^3}{|x|^5}\right] + 14\,\mathrm{arctg}(x+1)$$

6. Для того, чтобы проинтегрировать *неправильную* рациональную функцию, необходимо представить ее в виде суммы обычного полинома и *правильной* рациональной функции. Этого можно добиться, разделив полином, находящийся в числителе на полином из знаменателя.

Теорема

Для любых двух полиномов $A(x)$ и $B(x)$ всегда можно найти единственные полиномы $Q(x)$ и $R(x)$ такие, что

$$\frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)} \longrightarrow \text{Остаток от деления}, \quad \deg R(x) < \deg B(x)$$

$$\deg Q(x) = \deg A(x) - \deg B(x)$$

Здесь deg – сокращение от английского слова degree (степень); $\deg A(x)$ – степень полинома $A(x)$, $\deg B(x)$ – степень полинома $B(x)$ и т.д. Приведем примеры процедуры деления полиномов.

Примеры

1. Разделить полином $A(x) = 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 7x + 5$ на полином $B(x) = x^2 - 3x + 1$.

$$\begin{array}{r|l}
-\ 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 7x + 5 & x^2 - 3x + 1 \\ \cline{2-2}
2x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 6x & 2x^2 + 3x + 9 \\ \cline{1-1}
-\ 3x^3 + \ 0 \ - 7x & \\
3x^3 - 9x^2 + 3x & \\ \cline{1-1}
-\ 9x^2 + 10x + 5 & \\
9x^2 - 27x + 9 & \\ \cline{1-1}
17x - 4 &
\end{array}$$

$$\frac{2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 7x + 5}{x^2 - 3x + 1} = \underbrace{2x^2 + 3x + 9}_{Q(x)} + \frac{\overbrace{17x - 4}^{R(x)}}{x^2 - 3x + 1}$$

2. Разделить полином $A(x) = x^5 - 7x^3 - 12x + 18$ на полином $B(x) = x^3 - 2x^2 - 6$.

$$\begin{array}{r|l}
-\ x^5 + 0 - 7x^3 + 0 - 12x + 18 & x^3 - 2x^2 - 6 \\ \cline{2-2}
x^5 - 2x^4 + 0 - 6x^2 & x^2 + 2x - 3 \\ \cline{1-1}
-\ 2x^4 - 7x^3 + 6x^2 - 12x & \\
2x^4 - 4x^3 + \ 0 \ - 12x & \\ \cline{1-1}
-\ 3x^3 + 6x^2 + 0 + 18 & \\
3x^3 + 6x^2 + 0 + 18 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

$$\frac{x^5-7x^3-12x+18}{x^3-2x^2-6} = x^2+2x-3$$

Приведем теперь пример интегрирования неправильной рациональной функции.

Примеры

Вычислим интеграл $\int \frac{x^3+x^2+3x+4}{x^2+x-6}dx$. Разделим полином x^3+x^2+3x+4 на полином x^2+x-6:

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{r} x^3+x^2+3x+4 \\ x^3+x^2-6x \end{array} & \begin{array}{l} x^2+\ \ x-6 \\ \hline x \end{array} \\ \hline 9x+4 & \end{array}$$

$$\frac{x^3+x^2+3x+4}{x^2+x-6} = x + \frac{9x+4}{x^2+x-6}$$

Подставим полученное разложение в интеграл:

$$\int \frac{x^3+x^2+3x+4}{x^2+x-6}dx = \int \left(x + \frac{9x+4}{x^2+x-6} \right) dx = \int x dx + \int \frac{9x+4}{x^2+x-6}dx \qquad (1.2.14)$$

Дискриминант полинома x^2+x-6 – положительный, следовательно, для вычисления второго интеграла мы можем воспользоваться методом, описанном в пункте 4. Разложим полином x^2+x-6 на множители: корнями уравнения $x^2+x-6=0$ являются числа $x_1=-3$ и $x_2=2$, поэтому $x^2+x-6=(x-(-3))(x-2)=(x+3)(x-2)$. Далее разложим дробь $\frac{9x+4}{x^2+x-6}$ на сумму простейших дробей:

$$\frac{9x+4}{x^2+x-6} = \frac{9x+4}{\cancel{(x+3)(x-2)}} = \frac{A_1}{x+3} + \frac{A_2}{x-2} = \frac{A_1(x-2)+A_2(x+3)}{\cancel{(x+3)(x-2)}} \qquad (1.2.15)$$

Сокращаем числители и приравниваем знаменатели:

$$9x+4 = A_1(x-2)+A_2(x+3) \qquad (1.2.16)$$

Для нахождения чисел A_1, A_2 воспользуемся **методом частных значений**. Подставим в правую и левую части (1.2.16) $x=-3$:

$$9\cdot(-3)+4 = A_1(-3-2)+A_2\cdot 0 \Longleftrightarrow -23=-5A_1 \Longleftrightarrow A_1=\frac{23}{5}$$

Аналогично, подставляя в правую и левую части (1.2.16) $x=2$, найдем, что $A_2=\frac{22}{5}$. Подставим найденные числа A_1, A_2 в (1.2.15):

$$\frac{9x+4}{x^2+x-6} = \frac{A_1}{x+3} + \frac{A_2}{x-2}$$

Вернемся к интегралу:

$$\int \frac{9x+4}{x^2+x-6}dx = \int \left(\frac{\frac{23}{5}}{x+3} + \frac{\frac{22}{5}}{x-2} \right) dx = \frac{23}{5}\int \frac{dx}{x+3} + \frac{22}{5}\int \frac{dx}{x-2} =$$

$$= \frac{23}{5}\ln|x+3| + \frac{22}{5}\ln|x-2| + C, \quad C=\mathrm{const}$$

Подставляя полученное выражение в (1.2.14), получим ответ:

$$\int \frac{x^3+x^2+3x+4}{x^2+x-6}dx = \frac{1}{2}x^2 + \frac{8}{5}\ln|x+3| + \frac{22}{5}\ln|x-2| + C, \quad C = \mathrm{const}$$