Интегралы и дифференциальные уравнения

Модуль 1. Неопределенный интеграл

Лекция 1.1

Аннотация

Первообразная и ее свойства. Неопределенный интеграл, его свойства, связь с дифференциалом. Таблица основных неопределенных интегралов. Интегрирование подстановкой (заменой переменного). Интегрирование по частям.

Во многих задачах науки и техники приходится, зная производную какой-нибудь функции, находить саму эту функцию. Например, бывают ситуации, когда, зная зависимость силы тока от времени ($I(t)$), необходимо найти заряд q, прошедший через поперечное сечение проводника за некоторое время; сила тока – это производная заряда по времени ($I(t) = q'(t)$), следовательно для решения этой задачи необходимо из производной q' восстановить саму функцию q. Еще одним примером может служить нахождение зависимости пройденного телом пути от времени ($s(t)$) при условии, что нам известна зависимость скорости этого тела от времени ($v(t)$); известно, что $v(t) = s'(t)$, следовательно, мы снова должны из производной s' восстановить функцию s. В некоторых задачах по силе (F) и продолжительности удара требуется найти изменение импульса (p) того тела, которое произвело удар; так как $F(t) = p'(t)$, мы вновь приходим к проблеме восстановления функции p из ее производной p'.

Определение (первообразная)

Если $F'(x) = f(x)$, то функцию F называют первообразной функции f.

Примеры

1. Функция $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ является первообразной функции $f(x) = x^2$, так как $\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2$
2. Функция $F(u) = -\cos(u)$ является первообразной функции $f(u) = \sin(u)$, так как $\big(-\cos(u)\big)' = \sin(u)$

Свойство первообразных.

Теорема

Если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$, то функция $F(x)+C$, где C – любое число, тоже является первообразной функции $f(x)$.

□ Если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, то $F'(x) = f(x)$. Пусть C – произвольное число; $(F(x) + C)' = F'(x) + C' = F'(x) + 0 = f(x)$. ■

Условие существования первообразной.

Теорема

Если функция непрерывна, то у нее есть первообразная.

Процедура нахождения **всех** первообразных функции называется *интегрированием.*

Определение (неопределенный интеграл)

Множество всех первообразных функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом функции $f(x)$. Обозначение:

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad C = \text{const} \tag{1.1.1}$$

Принято говорить, что функция $f(x)$ находится *под* знаком интеграла. Функцию $f(x)$ называют *подынтегральной функцией.*

Свойства неопределенного интеграла.

1. Производная интеграла совпадает с подынтегральной функцией:

$$\boxed{\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)} \tag{1.1.2}$$

2. Интеграл от производной функции совпадает с самой функцией:

$$\boxed{\int f'(x)dx = f(x) + C, \ \ C = \text{const}} \tag{1.1.3}$$

3. Интеграл от суммы/разности функций равен сумме/разности интегралов этих функций:

$$\boxed{\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx} \tag{1.1.4}$$

4. Числовой множитель можно вынести за знак интеграла:

$$\boxed{\int C \cdot f(x)dx = C \cdot \int f(x)dx, \ \ C = \text{const}} \tag{1.1.5}$$

Примеры

1. $\displaystyle\int (2x^3 - x + 1)dx = 2\int x^3dx - \int xdx + \int dx = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + x + C, \ \ C = \text{const}$

2. $\displaystyle\int \left(3 \cdot 5^x - \frac{4}{\cos^2(x)}\right) dx = 3\int 5^x dx - 4\int \frac{1}{\cos^2(x)}dx = \frac{3 \cdot 5^x}{\ln 5} - 4\,\mathrm{tg}(x) + C, \ \ C = \text{const}$

Таблица 1. Основные интегралы

Интеграл $(a,b,k=\text{const})$	Результат интегрирования $(C=\text{const})$	Интеграл $(a,b,k=\text{const})$	Результат интегрирования $(C=\text{const})$
$\int 0dx$	C	$\int \frac{1}{\sin^2(kx+b)}dx$	$-\frac{1}{k}\,\mathrm{ctg}(kx+b)+C$
$\int kdx$	$kx+C$	$\int \frac{1}{\cos^2(kx+b)}dx$	$\frac{1}{k}\,\mathrm{tg}(kx+b)+C$
$\int (kx+b)^a dx,\quad a\neq -1$	$\frac{1}{k}\frac{(kx+b)^{a+1}}{a+1}+C$	$\int \frac{1}{\sqrt{b-kx^2}}dx$ $b>0,\ k>0$	$\frac{1}{\sqrt{k}}\arcsin\left(\frac{\sqrt{k}x}{\sqrt{b}}\right)+C$
$\int (kx+b)^{-1}dx=\int \frac{dx}{kx+b}$	$\frac{1}{k}\ln\lvert kx+b\rvert+C$	$\int \sqrt{b-kx^2}\,dx$ $b>0,\ k>0$	$\frac{x}{2}\sqrt{b-kx^2}+\frac{b}{2\sqrt{k}}\arcsin\left(\frac{\sqrt{k}x}{\sqrt{b}}\right)+C$
$\int a^{kx+b}dx$	$\frac{1}{k}\frac{a^{kx+b}}{\ln(a)}+C$	$\int \frac{1}{\sqrt{b+kx^2}}dx$ $k>0$	$\frac{1}{\sqrt{k}}\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+\frac{b}{k}}\right\rvert+C$
$\int \mathrm{e}^{kx+b}\,dx$	$\frac{1}{k}\,\mathrm{e}^{kx+b}+C$	$\int \sqrt{b+kx^2}\,dx$ $k>0$	$\frac{x}{2}\sqrt{b+kx^2}+\frac{b}{2\sqrt{k}}\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+\frac{b}{k}}\right\rvert+C$
$\int \sin(kx+b)dx$	$-\frac{1}{k}\cos(kx+b)+C$	$\int \frac{1}{b-kx^2}dx$ $b>0,\ k>0$	$\frac{1}{2\sqrt{bk}}\ln\left\lvert\frac{\sqrt{b}+kx}{\sqrt{b}-kx}\right\rvert+C$
$\int \cos(kx+b)dx$	$\frac{1}{k}\sin(kx+b)+C$	$\int \frac{1}{b+kx^2}dx$ $b>0,\ k>0$	$\frac{1}{\sqrt{bk}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{k}x}{\sqrt{b}}\right)+C$

Интегрирование с помощью замены переменных.

Напомним, что дифференциалом функции называют ту часть приращения этой функции, которая линейна относительно приращения аргумента; дифференциал df функции f можно вычислить по формуле:

$$df=f'(x)dx \tag{1.1.6}$$

Пусть $f(y)$ – некоторая функция, зависящая от y, $y(x)$ – некоторая функция, зависящая от x; функцию $f(y(x))$ называют композицией функций f и y (по-другому такую функцию называют *сложной* функцией). Предположим, что подынтегральная функция представляет собой произведение $f(y(x))\cdot y'(x)$.

В этом случае для упрощения процесса интегрирования можно сделать замену переменных:

$$\int f(\overbrace{y(x)}^{t}) \cdot \underbrace{y'(x)dx}_{dt} = \left| \begin{array}{c} t = y(x) \\ \Downarrow \\ dt = y'(x)dx \end{array} \right| = \int f(t)dt \qquad (1.1.7)$$

Примеры

1. Пусть F — первообразная функции f; пусть $k, b = \text{const}$. Тогда $\int f(kx+b)dx = \left| \begin{array}{c} t = kx+b \\ \Downarrow \\ dt = kdx \\ \Downarrow \\ dx = \frac{dt}{k} \end{array} \right| =$

$= \dfrac{1}{k}\displaystyle\int f(t)dt = \dfrac{1}{k}F(t) + C = \dfrac{1}{k}F(kx+b) + C,\ \ C = \text{const}$

Рассмотрим конкретные примеры применения формулы из пункта 1:

(a) $\displaystyle\int \sin(3x)dx = \left| \begin{array}{c} \text{в данном случае } k = 3,\ b = 0,\ t = 3x \\ f(t) = \sin t \Rightarrow F(t) = -\cos(t) \end{array} \right| = -\frac{1}{3}\cos(3x) + C.\ \ C = \text{const}$

(b) $\displaystyle\int \frac{ds}{2s-11} = \left| \begin{array}{c} \text{в данном случае } k = 2,\ b = -11,\ t = 2s-11 \\ f(t) = \frac{1}{t} \Rightarrow F(t) = \ln|t| \end{array} \right| = \frac{1}{2}\ln|2s-11| + C,\ \ C = \text{const}$

2. $\displaystyle\int x\sin(x^2+3)dx = \int \overbrace{\sin}^{f}(\overbrace{x^2+3}^{y(x)}) \underbrace{x}_{\text{почти } y'(x)} dx = \left| \begin{array}{c} t = x^2+3 \\ \Downarrow \\ dt = 2xdx \\ \Downarrow \\ dx = \frac{dt}{2x} \end{array} \right| = \int \sin(t)\cancel{x}\frac{dt}{2\cancel{x}} =$

$\displaystyle\frac{1}{2}\int \sin(t)dt =$

$\displaystyle= -\frac{1}{2}\cos(t) + C = -\frac{1}{2}\cos(x^2+3) + C,\ \ C = \text{const}$

3. $\displaystyle\int \text{tg}(x)dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx = \left| \begin{array}{c} t = \cos(x) \\ \Downarrow \\ dt = -\sin(x)dx \\ \Downarrow \\ dx = -\frac{dt}{\sin(x)} \end{array} \right| = -\int \frac{\cancel{\sin(x)}}{t}\frac{dt}{\cancel{\sin(x)}} = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| +$

$C =$

$= -\ln|\cos(x)| + C, \quad C = \text{const}$

Не забывайте делать обратную замену!

Интегрирование по частям.

Пусть $u(x), v(x)$ – функции, для которых существуют производные. Согласно правилу Лейбница $(uv)' = u'v + v'u$; согласно свойству неопределенного интеграла (формула (1.1.3)): $\int (uv)'dx = uv$. Следовательно, $\int (uv)'dx = \int (u'v + v'u)dx = \int u'vdx + \int v'udx = uv$. Перенося второй интеграл в правую часть равенства с противоположным знаком, получим *формулу интегрирования по частям*:

$$\boxed{\int u'vdx = uv - \int v'udx} \qquad (1.1.8)$$

Формула (1.1.8) нужна для того, чтобы вычисление интеграла $\int u'vdx$ заменить на вычисление интеграла $\int v'udx$, так как бывают ситуации (для некоторых функций u и v), когда второй интеграл вычислить значительно легче, чем первый. Рассмотрим несколько типов интегралов, которые вычисляются с помощью интегрирования по частям.

Примеры

1. Интегралы $\boxed{\int (ax+b)^n \cos(cx)dx, \ \int (ax+b)^n \sin(cx)dx, \ \int (ax+b)^n \, \mathrm{e}^{cx} \, dx}$ (a, b, c – произвольные числа; n – натуральное число) можно вычислить, применяя формулу (1.1.8) n раз подряд, если обозначить $v = (ax+b)^n, \ u' = \cos(cx)$ (или $u' = \sin(cx)$, или $u' = \mathrm{e}^{cx}$).

$$\int \underbrace{x^2}_{v} \underbrace{\sin(5x)}_{u'} dx = \left| \begin{array}{c} \text{интегрируем по частям первый раз} \\ \text{в этом примере } a=1, \ b=0, \ c=5, \ n=2 \\ v = x \Longrightarrow v' = 1; \ u' = \sin(5x) \Longrightarrow u = -\frac{1}{5}\cos(5x) \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{1}{5}x^2\cos(5x) - \int \underbrace{2x}_{v'} \cdot \left(\underbrace{-\frac{1}{5}\cos(5x)}_{u} \right) dx = -\frac{1}{5}x^2\cos(5x) + \frac{2}{5}\int \underbrace{x}_{v} \underbrace{\cos(5x)}_{u'} dx =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \text{интегрируем по частям второй раз} \\ v = x \Longrightarrow v' = 1; \ u' = \cos(5x) \Longrightarrow u = \frac{1}{5}\sin(5x) \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{1}{5}x^2\cos(5x) + \frac{2}{25}x\sin(5x) - \frac{2}{25}\int \sin(5x)dx =$$

$$= -\frac{1}{5}x^2\cos(5x) + \frac{2}{25}x\sin(5x) + \frac{2}{125}\cos(5x) + C, \quad C = \text{const}$$

2. Интегралы $\boxed{\int e^{ax}\cos(bx)dx,\ \int e^{ax}\sin(bx)dx}$ (a, b – произвольные числа) можно вычислить, дважды проинтегрировав их по частям; в данном случае не важно, какую из функций, экспоненциальную или тригонометрическую, выбирать в качестве u', а какую – в качестве v.

$$\int e^{2x}\sin(x)dx = \left|\begin{array}{c}\text{интегрируем по частям первый раз}\\ \text{в данном случае } a=2,\ b=1\\ \text{Пусть } u'=\sin(x)\Longrightarrow u=-\cos(x);\ v=e^{2x}\Longrightarrow v'=2e^{2x}\end{array}\right| =$$

$$= -\cos(x)e^{2x} - \int 2e^{2x}(-\cos(x))dx = -\cos(x)e^{2x} + 2\int e^{2x}\cos(x) =$$

$$= \left|\begin{array}{c}\text{интегрируем по частям второй раз}\\ v=e^{2x}\Longrightarrow v'=2e^{2x};\ u'=\cos(x)\Longrightarrow u=\sin(x)\end{array}\right| =$$

$$= -\cos(x)e^{2x} + \sin(x)e^{2x} - 2\int e^{2x}\sin(x)dx$$

Мы получили уравнение:

$$\int e^{2x}\sin(x)dx = -\cos(x)e^{2x} + \sin(x)e^{2x} - 2\int e^{2x}\sin(x)dx$$

Перенесем интеграл из правой части в левую; в правой части вынесем экспоненту за скобки, разделим правую и левую части на 3:

$$3\int e^{2x}\sin(x)dx = e^{2x}(\sin(x)-\cos(x)) \Longrightarrow \int e^{2x}\sin(x)dx = \frac{1}{3}e^{2x}(\sin(x)-\cos(x))$$

3. Интегралы, содержащие в качестве множителя логарифмическую или обратную тригонометрическую функцию.

(a) $$\int\frac{\ln(x)}{x^2}dx = \int\frac{1}{x^2}\cdot\ln(x)dx = \int x^{-2}\cdot\ln(x)dx = \left|\begin{array}{c} v=\ln(x)\Longrightarrow v'=\frac{1}{x}=x^{-1}\\ u'=x^{-2}\Longrightarrow u=-x^{-1}\end{array}\right| =$$

$$= -x^{-1}\ln(x) + \int x^{-2}dx = -x^{-1}\ln(x) - x^{-1} + C = -x^{-1}(\ln(x)+1) + C =$$

$$= -\frac{\ln(x)+1}{x} + C,\quad C = \mathrm{const}$$

(b) $$\int\operatorname{arctg}(x)dx = \int\operatorname{arctg}(x)\cdot 1\,dx = \left|\begin{array}{c} v=\operatorname{arctg}(x)\Longrightarrow v'=\frac{1}{x^2+1}\\ u'=1\Longrightarrow u=x\end{array}\right| =$$

$$= x\operatorname{arctg}(x) - \int\frac{x}{x^2+1}dx = \left|\begin{array}{c}\text{делаем замену:}\\ t=x^2+1\Longrightarrow dt=2xdx\Longrightarrow dx=\frac{dt}{2x}\end{array}\right| =$$

$$= x\operatorname{arctg}(x) - \int\frac{\cancel{x}}{t}\frac{dt}{2\cancel{x}} = x\operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t} = x\operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2}\ln|t| + C =$$

$$= x\operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C,\quad C = \mathrm{const}$$

В отличие от производной, первообразную элементарной функции не всегда можно выразить через элементарные функции. Существует большое количество так называемых *специальных функций*, которые не менее важны для решения научных и инженерных задач, чем элементарные. Приведем примеры специальных функций:

- Интегральный синус: $Si(x) = \int \frac{\sin(x)}{x} dx$
- Интегральный косинус: $Ci(x) = \int \frac{\cos(x)}{x} dx$
- Интегральный логарифм: $Li(x) = \int \frac{dx}{\ln(x)}$