Аналитическая геометрия

Модуль 1. Матричная алгебра. Векторная алгебра

Лекция 5

Аннотация

Ориентация базиса, правые и левые тройки векторов. Векторное произведение двух векторов, его геометрический и механический смысл. Алгебраические свойства векторного произведения. Вычисление векторного произведения в ортонормированном базисе. Смешанное произведение векторов, его геометрический смысл. Алгебраические свойства смешанного произведения. Вычисление смешанного произведения в ортонормированном базисе. Условие компланарности трех векторов.

§8. Векторное произведение векторов

8.1. Определение векторного произведения и его свойства

<u>Опр.</u> Три некомпланарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, взятые в указанном порядке, образуют **правую тройку**, если с конца третьего вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\vec{a}$ ко второму вектору $\vec{b}$ виден совершающимся против часовой стрелки, и **левую**, если по часовой (рис. 8.1).

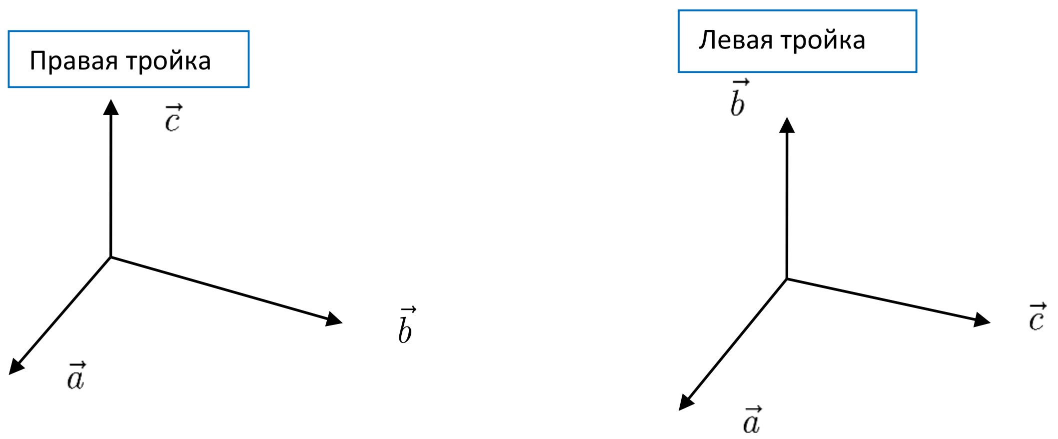

Рис. 8.1. Ориентация векторов в пространстве

<u>Опр.</u> Так как три некомпланарных вектора образуют базис в V_3, то также говорят о **правых** и **левых базисах.** Каждый базис является либо правым, либо левым, т.е. все базисы в V_3 разделяются на два класса: класс правых

базисов и класс левых базисов. Класс, к которому относится фиксированный базис, называется его **ориентацией**.

<u>*Опр.*</u> **Векторным произведением** вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который удовлетворяет условиям:

1) перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$;
2) имеет длину, численно равную площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, как на сторонах, т.е.

$$\boxed{|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})};$$

3) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку.

Обозначение: $\vec{a} \times \vec{b}$ или $[\vec{a},\vec{b}]$.

Свойства векторного произведения

1. При перестановке множителей векторное произведение меняет знак на противоположный, то есть, $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$.

2. $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$, где $\lambda \in \mathrm{R}$.

3. Два ненулевых вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно $\vec{0}$, то есть $\vec{a} \,||\, \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0$.

4. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$.

8.2. Выражение векторного произведения через координаты векторов

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ разложены по базису $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$: $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$. Тогда, используя свойства векторного произведения, перемножая эти векторы как многочлены, найдем, что

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \times (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k}.$$

Или полученную формулу записывают короче в виде:

$$\boxed{\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}}$$

(раскладывать можно только по первой строке!).

8.3. Некоторые приложения векторного произведения

1. Установление коллинеарности векторов.

Пример. Выяснить, лежат ли точки $A(4;-2;6)$, $B(1;8;-2)$, $C(-4;3;2)$ на одной прямой?

Решение.

1) Составим векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AB}=(1-4;8-(-2);-2-6)=(-3;10;-8)$,

$\overrightarrow{AC}=(-4-4;3-(-2);2-6)=(-8;5;-4)$.

2) Найдем векторное произведение этих векторов:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & 10 & -8\\ -8 & 5 & -4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}10 & -8\\ 5 & -4\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-3 & -8\\ -8 & -4\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-3 & 10\\ -8 & 5\end{vmatrix}\vec{k}=$$
$$=0\vec{i}+52\vec{j}+65\vec{k}\neq\vec{0}.$$

Это значит, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ - неколлинеарны и, следовательно, точки *A*, *B* и *C* не могут лежать на одной прямой.

Ответ: не лежат.

2. Нахождение площади параллелограмма и треугольника.

По определению векторного произведения $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$.

Эту формулу можно использовать для нахождения площади параллелограмма и треугольника, т.е. $S_{пар}=|\vec{a}\times\vec{b}|$ и, значит, $S_{\Delta}=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$.

<u>Пример</u>. Найти площадь треугольника с вершинами $A(5;2;-1)$, $B(3;1;-2)$, $C(4;-2;2)$.

Решение.

1) Найдем векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AB} = (3-5;1-2;-2-(-1)) = (-2;-1;-1)$,

$\overrightarrow{AC} = (4-5;-2-2;2-(-1)) = (-1;-4;3)$.

2) Вычислим векторное произведение:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}\vec{k} =$$
$$= -7\vec{i} + 7\vec{j} + 7\vec{k}.$$

3) $S_{\Delta} = \frac{1}{2}\,|\,\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\,| = \frac{1}{2}\sqrt{7^2+7^2+7^2} = \frac{7}{2}\sqrt{3}$ (кв.ед).

Ответ: $S_{\Delta} = \frac{7}{2}\sqrt{3}$ (кв.ед).

<u>Пример</u>. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$ и $\vec{b} = 2\vec{m} + \vec{n}$, где $\vec{m}$ и $\vec{n}$ - единичные векторы, образующие угол 30°.

Решение.

1) Найдем векторное произведение:

$$\vec{a}\times\vec{b} = (\vec{m}+2\vec{n})\times(2\vec{m}+\vec{n}) = 2(\vec{m}\times\vec{m}) + \vec{m}\times\vec{n} + 4(\vec{n}\times\vec{m}) + 2(\vec{n}\times\vec{n}) =$$
$$= \vec{m}\times\vec{n} - 4(\vec{m}\times\vec{n}) = -3(\vec{m}\times\vec{n}).$$

2) Вычислим модуль векторного произведения:

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|-3(\vec{m}\times\vec{n})\right| = 3\cdot|\,\vec{m}\,|\cdot|\,\vec{n}\,|\sin 30 = 3\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = 1{,}5.$$

3) $S_{пар} = |\,\vec{a}\times\vec{b}\,| = 1{,}5$.

Ответ: $S_{пар} = 1{,}5$.

3. Определение момента силы относительно точки.

Пусть в точке *A* приложена сила $\vec{F}=\overrightarrow{AB}$ и пусть *O* – некоторая точка пространства (рис. 8.2).

Из физики известно, что **моментом силы** $\vec{F}$ относительно точки *O* называется вектор $\vec{m}$, который проходит через точку *O* и:

а) перпендикулярен плоскости, проходящей через точки *O, A, B*;

б) численно равен произведению силы на плечо

$|\vec{m}|=|\vec{F}|\cdot ON=|\vec{F}|\cdot|r|\cdot\sin\varphi=|\vec{F}|\cdot|\overrightarrow{OA}|\sin(\widehat{\vec{F},\overrightarrow{OA}})$;

в) образует правую тройку с векторами $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{AB}$.

Следовательно, $\boxed{\vec{m}=\overrightarrow{OA}\times\vec{F}}$.

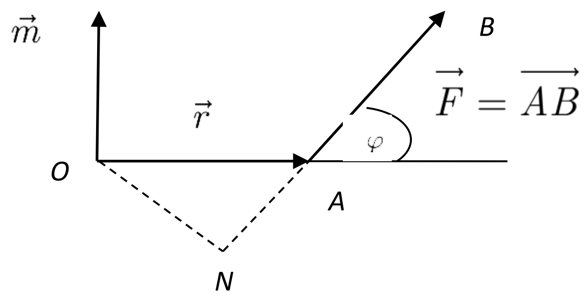

Рис. 8.2. Момент силы относительно точки.

Пример. Сила $\vec{F}=(2,-4,5)$ приложена к точке $A(4,-2,3)$. Определить момент этой силы относительно точки $O(3,2,-1)$.

Решение.

Найдем вектор $\overrightarrow{OA}=(4-3;-2-2;-1-3)=(1;-4;-4)$.

Тогда момент $\vec{m}$ силы $\vec{F}$ относительно точки *O* равен:

$$\vec{m}=\overrightarrow{OA}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -4 & -4\\ 2 & -4 & 5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-4 & -4\\ -4 & 5\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & -4\\ 2 & 5\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & -4\\ 2 & -4\end{vmatrix}\vec{k}=$$

$$=-36\vec{i}-13\vec{j}+4\vec{k}=(-36;-13;4).$$

Ответ: $\vec{m} = (-36; -13; 4)$.

§9. Смешанное произведение векторов

9.1. Определение смешанного произведения, его геометрический смысл

<u>*Опр*</u>. **Смешанным произведением** трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется <u>число</u>, равное $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$ - скалярному произведению векторного произведения первых двух векторов и третьего вектора.

Обозначение: $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Геометрическая интерпретация смешанного произведения

На трех некомпланарных векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ построим параллелепипед как на ребрах, выходящих из одной вершины (рис. 9.1). Тогда объем построенного параллелепипеда будет численно равен значению смешанного произведения векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и взятому со знаком «плюс», если тройка векторов правая, со знаком «мину», если тройка – левая.

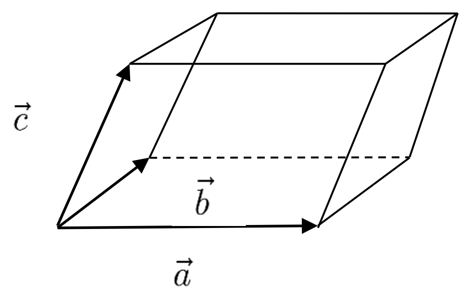

Рис. 9.1. Геометрический смысл смешанного произведения.

Свойства смешанного произведения.

1. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{b}$ (циклическая перестановка).

2. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ (перестановка местами знаков векторного и скалярного произведения).

3. $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=-\vec{a}\vec{c}\vec{b}$; $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=-\vec{b}\vec{a}\vec{c}$; $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=-\vec{c}\vec{b}\vec{a}$ (перестановка двух векторов).

4. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0$ тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

9.2. Выражение смешанного произведения через координаты

Пусть векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ разложены по базису $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$: $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$, $\vec{c}=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}$.

Тогда, используя свойства смешанного произведения, найдем, что

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}\cdot(c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k})=$$

$$=\left(\begin{vmatrix}a_y&a_z\\b_y&b_z\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a_x&a_z\\b_x&b_z\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_x&a_y\\b_x&b_y\end{vmatrix}\vec{k}\right)\cdot(c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k})=$$

$$=\begin{vmatrix}a_y&a_z\\b_y&b_z\end{vmatrix}c_x-\begin{vmatrix}a_x&a_z\\b_x&b_z\end{vmatrix}c_y+\begin{vmatrix}a_x&a_y\\b_x&b_y\end{vmatrix}c_z=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}.$$

Тогда

$$\boxed{\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}}.$$

9.3. Некоторые приложения смешанного произведения

1. Определение взаимной ориентации векторов в пространстве.

Если $\vec{a}\vec{b}\vec{c}>0$, то тройка $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ - правая, если $\vec{a}\vec{b}\vec{c}<0$, то тройка $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ - левая.

2. Установление компланарности векторов.

$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0\Leftrightarrow$ векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ - компланарны.

Пример. Выяснить, лежат ли точки $M_1(2;5;3)$, $M_2(3;7;4)$, $M_3(-5;5;-1)$, $M_4(-4;-3;0)$ в одной плоскости?

Решение:

1) Найдем векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$, $\overrightarrow{M_1M_4}$.

$\overrightarrow{M_1M_2} = (3-2; 7-5; 4-3) = (1; 2; 1)$, $\overrightarrow{M_1M_3} = (-5-2; 5-5; -1-3) = (-7; 0; -4)$,

$\overrightarrow{M_1M_4} = (-4-2; -3-5; 0-3) = (-6; -8; -3)$.

2) Вычислим смешанное произведение векторов $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$, $\overrightarrow{M_1M_4}$.

$$\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_3} \cdot \overrightarrow{M_1M_4} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -7 & 0 & -4 \\ -6 & -8 & -3 \end{vmatrix} = 30 \neq 0.$$

Отсюда, на основании свойства 4) смешанного произведения делаем вывод, что векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$, $\overrightarrow{M_1M_4}$ не лежат в одной плоскости, а значит, и точки M_1, M_2, M_3, M_4 не лежат в одной плоскости.

3. Определение объемов параллелепипеда и треугольной пирамиды

Согласно геометрическому смыслу смешанного произведения векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

, объем параллелепипеда, построенного на этих векторах, равен $\boxed{V = \vec{a}\vec{b}\vec{c}}$. А объем треугольной пирамиды, построенной на этих же вектора $\boxed{V_1 = \frac{1}{6}V = \frac{1}{6}\vec{a}\vec{b}\vec{c}}$.

Пример. Найти объем пирамиды, если заданы ее вершины: $A(1; -1; -1)$, $B(0; 5; 4)$, $C(2; -3; -4)$, $D(5; -4; -6)$.

Решение:

1) Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{AB} = (-1; 6; 5)$, $\overrightarrow{AC} = (1; -2; -3)$, $\overrightarrow{AD} = (4; -3; -5)$.

2) Вычислим смешанное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$.

$$\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -1 & 6 & 5 \\ 1 & -2 & -3 \\ 4 & -3 & -5 \end{vmatrix} = -18.$$

Тогда объем параллелепипеда, построенного на трех рассматриваемых векторах, равен $V = |-18| = 18$ куб. ед., а искомый объем треугольной пирамиды

$ABCD$ равен $V_1 = \frac{1}{6} \cdot 18 = 3$ куб. ед.

Ответ: $V_{\text{пир}}$=3 куб.ед.