Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Математический анализ

Модуль 1. Элементарные функции и пределы числовых последовательностей

Лекция 1.3

к.ф.-м.н. Семакин А.Н.

Необходимое и достаточное условия сходимости

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной**, если $\exists b > 0 \; \forall n \in N\colon |x_n| \leq b$.

Необходимое и достаточное условия сходимости

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной**, если $\exists b > 0\ \forall n \in N$: $|x_n| \leq b$.

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной сверху (снизу)**, если $\exists b \in R\ \forall n \in N$: $x_n \leq b$ $(x_n \geq b)$.

Необходимое и достаточное условия сходимости

*Теорема (необходимое условие сходимости)**

Необходимое и достаточное условия сходимости

*Теорема (необходимое условие сходимости)**
Если числовая последовательность имеет конечный предел, то она ограничена.

Доказательство

Необходимое и достаточное условия сходимости

Доказательство

Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Доказательство

Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Возьмем $\varepsilon = 1$.

Необходимое и достаточное условия сходимости

Доказательство

Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Возьмем $\varepsilon = 1$.

Тогда по определению предела

Доказательство

Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Возьмем $\varepsilon = 1$.

Тогда по определению предела

$\exists n_1\ \forall n > n_1\colon |x_n - a| < 1$.

Необходимое и достаточное условия сходимости

Пусть $d = \max\{1, |x_1 - a|, |x_2 - a|, \ldots, |x_{n_1} - a|\}$.

Необходимое и достаточное условия сходимости

Пусть $d = \max\{1, |x_1 - a|, |x_2 - a|, \ldots, |x_{n_1} - a|\}$.
Тогда $\forall n \in N$: $|x_n - a| \leq d$.

Необходимое и достаточное условия сходимости

Пусть $d = \max\{1, |x_1 - a|, |x_2 - a|, \dots, |x_{n_1} - a|\}$.
Тогда $\forall n \in N$: $|x_n - a| \leq d$.
$\Rightarrow -d \leq x_n - a \leq d$

Необходимое и достаточное условия сходимости

Пусть $d = \max\{1, |x_1 - a|, |x_2 - a|, \ldots, |x_{n_1} - a|\}$.
Тогда $\forall n \in N$: $|x_n - a| \le d$.
$\Rightarrow -d \le x_n - a \le d$
$\Rightarrow a - d \le x_n \le a + d$

Пусть $d = \max\{1, |x_1 - a|, |x_2 - a|, \ldots, |x_{n_1} - a|\}$.
Тогда $\forall n \in N$: $|x_n - a| \leq d$.
$\Rightarrow -d \leq x_n - a \leq d$
$\Rightarrow a - d \leq x_n \leq a + d$
$\Rightarrow$ последовательность $\{x_n\}$ ограничена. ■

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **возрастающей (убывающей)**, если $\forall n \in N$: $x_n \leq x_{n+1}$ $(x_n \geq x_{n+1})$.

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **возрастающей (убывающей)**, если $\forall n \in N$: $x_n \leq x_{n+1}$ $(x_n \geq x_{n+1})$.

Определение

Возрастающие и убывающие последовательности называются **монотонными**.

Необходимое и достаточное условия сходимости

Теорема (достаточное условие сходимости, теорема Вейерштрасса)

Необходимое и достаточное условия сходимости

Теорема (достаточное условие сходимости, теорема Вейерштрасса)

Всякая возрастающая (убывающая) и ограниченная сверху (снизу) последовательность имеет конечный предел.

Бесконечно большая последовательность

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно большой**, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in N \ \forall n > n(\varepsilon)\colon |x_n| > \varepsilon$.

Бесконечно большая последовательность

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно большой**, если
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in N \ \forall n > n(\varepsilon)\colon |x_n| > \varepsilon.$

В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно большой**, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in N \ \forall n > n(\varepsilon)\colon |x_n| > \varepsilon$.

В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ и говорят, что последовательность $\{x_n\}$ имеет **бесконечный предел**.

Бесконечно большая последовательность

Частные случаи

Бесконечно большая последовательность

Частные случаи

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, если

Бесконечно большая последовательность

Частные случаи

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, если

$\forall\varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon x_n > \varepsilon$

Бесконечно большая последовательность

Частные случаи

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, если

$\forall\varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon x_n > \varepsilon$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, если

Бесконечно большая последовательность

Частные случаи

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, если

$\forall\varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon x_n > \varepsilon$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, если

$\forall\varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon x_n < -\varepsilon$

Бесконечно малая последовательность

Бесконечно малая последовательность

Определение
Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно малой**, если
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in N \; \forall n > n(\varepsilon)\colon |x_n| < \varepsilon$.

Бесконечно малая последовательность

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно малой**, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in N \ \forall n > n(\varepsilon)\colon |x_n| < \varepsilon$.

В этом случае пишут $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$.

Свойства бесконечно малых последовательностей

Бесконечно малая последовательность

Свойства бесконечно малых последовательностей

1) если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ - бесконечно малые, то $\{x_n + y_n\}$ - бесконечно малая

Бесконечно малая последовательность

Свойства бесконечно малых последовательностей

1) если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ - бесконечно малые, то $\{x_n + y_n\}$ - бесконечно малая

2) если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ - бесконечно малые, то $\{x_n \cdot y_n\}$ - бесконечно малая

Бесконечно малая последовательность

Свойства бесконечно малых последовательностей

1) если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ - бесконечно малые, то $\{x_n + y_n\}$ - бесконечно малая

2) если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ - бесконечно малые, то $\{x_n \cdot y_n\}$ - бесконечно малая

3) если $\{x_n\}$ - бесконечно малая, $\{y_n\}$ - ограниченная то $\{x_n \cdot y_n\}$ - бесконечно малая

Связь между бесконечно малой и бесконечно большой последовательностями

Связь между бесконечно малой и бесконечно большой последовательностями

*Теорема №1**

Если $\{x_n\}$ - бесконечно большая, то $\{1/x_n\}$ - бесконечно малая.

Связь между бесконечно малой и бесконечно большой последовательностями

Доказательство

Связь между бесконечно малой и бесконечно большой последовательностями

Доказательство

$\{x_n\}$ - бесконечно большая

Связь между бесконечно малой и бесконечно большой последовательностями

Доказательство

$\{x_n\}$ - бесконечно большая $\Rightarrow$

$\forall M > 0 \ \exists n(M) \in N \ \forall n > n(M)$: $|x_n| > M$

Связь между бесконечно малой и бесконечно большой последовательностями

Доказательство

$\{x_n\}$ - бесконечно большая $\Rightarrow$

$\forall M > 0 \; \exists n(M) \in N \; \forall n > n(M)$: $|x_n| > M$

$$\Rightarrow \frac{1}{|x_n|}$$

Связь между бесконечно малой и бесконечно большой последовательностями

Доказательство

$\{x_n\}$ - бесконечно большая $\Rightarrow$

$\forall M > 0 \ \exists n(M) \in N \ \forall n > n(M)\colon |x_n| > M$

$$\Rightarrow \frac{1}{|x_n|} = \left|\frac{1}{x_n}\right|$$

Связь между бесконечно малой и бесконечно большой последовательностями

Доказательство

$\{x_n\}$ - бесконечно большая $\Rightarrow$

$\forall M > 0 \; \exists n(M) \in N \; \forall n > n(M)$: $|x_n| > M$

$$\Rightarrow \frac{1}{|x_n|} = \left|\frac{1}{x_n}\right| < \frac{1}{M}$$

Связь между бесконечно малой и бесконечно большой последовательностями

Обозначим: $\varepsilon = \dfrac{1}{M}$.

Связь между бесконечно малой и бесконечно большой последовательностями

Обозначим: $\varepsilon = \dfrac{1}{M}$.

Тогда имеем

Связь между бесконечно малой и бесконечно большой последовательностями

Обозначим: $\varepsilon = \dfrac{1}{M}$.

Тогда имеем

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in N \; \forall n > n(\varepsilon): \left|\frac{1}{x_n}\right| < \varepsilon$$

Связь между бесконечно малой и бесконечно большой последовательностями

Обозначим: $\varepsilon = \dfrac{1}{M}$.

Тогда имеем

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in N \ \forall n > n(\varepsilon): \left| \frac{1}{x_n} \right| < \varepsilon$$

$\Rightarrow \{1/x_n\}$ - бесконечно малая. ■

Связь между бесконечно малой и бесконечно большой последовательностями

Теорема №2

Если $\{x_n\}$ - бесконечно малая и $\forall \boldsymbol{n}$: $x_n \neq 0$, то $\{1/x_n\}$ - бесконечно большая.

Связь между бесконечно малой и бесконечно большой последовательностями

Символически эти теоремы можно записать в виде:

$$\frac{1}{\infty} = 0, \qquad \frac{1}{0} = \infty.$$

Связь между бесконечно малой и бесконечно большой последовательностями

Символически эти теоремы можно записать в виде:

$$\frac{1}{\infty} = 0, \qquad \frac{1}{0} = \infty.$$

Пример:

Связь между бесконечно малой и бесконечно большой последовательностями

Символически эти теоремы можно записать в виде:

$$\frac{1}{\infty} = 0, \qquad \frac{1}{0} = \infty.$$

Пример:

$\{n\}$ - бесконечно большая, $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$

Связь между бесконечно малой и бесконечно большой последовательностями

Символически эти теоремы можно записать в виде:

$$\frac{1}{\infty} = 0, \qquad \frac{1}{0} = \infty.$$

Пример:

$\{n\}$ - бесконечно большая, $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$

$\{1/n\}$ - бесконечно малая, $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n = 0$

Теоремы о конечных и бесконечных пределах

Теоремы о конечных и бесконечных пределах

В этих теоремах под пределами понимаются как конечный, так и определенного знака бесконечный пределы, т.е. либо число, либо $+\infty$, либо $-\infty$. Случай, когда предел равен ∞, не рассматривается.

Теорема (единственность предела)

Теорема (единственность предела)
Последовательность точек расширенной числовой прямой $\overline{R}$ может иметь на этой прямой только один предел.

Теорема (предельный переход в неравенствах)

Теорема (предельный переход в неравенствах)
Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, где $a \in \overline{R}$, и $\forall n : x_n \leq y_n \leq z_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$

Число e

Число e

Число e определяется как предел последовательности чисел

Число e

Число e определяется как предел последовательности чисел

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

Число e

Число e определяется как предел последовательности чисел

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

т.е.

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Число e определяется как предел последовательности чисел

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

т.е.

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Приближенные оценки дают, что $e \approx 2.718281828459045$.

Число e определяется как предел последовательности чисел

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

т.е.

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Приближенные оценки дают, что $e \approx 2.718281828459045$. В приближенных вычислениях обычно полагают $e \approx 2.72$.

Число e

Число e является основанием экспоненциальной функции $y = e^x$

Число e

Число e является основанием экспоненциальной функции $y = e^x$ и натурального логарифма $y = \ln x = \log_e x$.

Число e

Число e является основанием экспоненциальной функции $y = e^x$ и натурального логарифма $y = \ln x = \log_e x$. Также через e определяются гиперболические функции.

1) гиперболический синус

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Число e

1) гиперболический синус

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

2) гиперболический косинус

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

3) гиперболический тангенс

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

3) гиперболический тангенс

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

4) гиперболический котангенс

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$$

Экономическое приложение:

Число e

Экономическое приложение:

В экономических моделях число e используется для вычисления доходности банковских вкладов при непрерывном начислении и капитализации процентов.

Число e

Экономическое приложение:

В экономических моделях число e используется для вычисления доходности банковских вкладов при непрерывном начислении и капитализации процентов.

Допустим, мы открыли в банке вклад размером S рублей с годовой процентной ставкой r.

Экономическое приложение:

В экономических моделях число e используется для вычисления доходности банковских вкладов при непрерывном начислении и капитализации процентов. Допустим, мы открыли в банке вклад размером S рублей с годовой процентной ставкой r. По условиям вклада начисление процентов и их капитализация происходит n раз в год.

Экономическое приложение:

Тогда через m лет размер вклада составит

$$K = S \cdot \left(1 + \frac{r}{100n}\right)^{m \cdot n}.$$

Экономическое приложение:

Тогда через m лет размер вклада составит

$$K = S \cdot \left(1 + \frac{r}{100n}\right)^{m \cdot n}.$$

Соответственно, при непрерывном начислении процентов и их капитализации мы будем иметь

$$K = \lim_{n\to\infty} S \cdot \left(1 + \frac{r}{100n}\right)^{m \cdot n} = S \cdot e^{rm/100}.$$