

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет "Фундаментальные науки"
Кафедра "Высшая математика"

Математический анализ
Модуль 1. Элементарные функции
и пределы числовых последовательностей
Лекция 1.2

к.ф.-м.н. Семакин А.Н.



Принцип вложенных отрезков



Принцип вложенных отрезков

Рассмотрим бесконечную последовательность отрезков $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots$



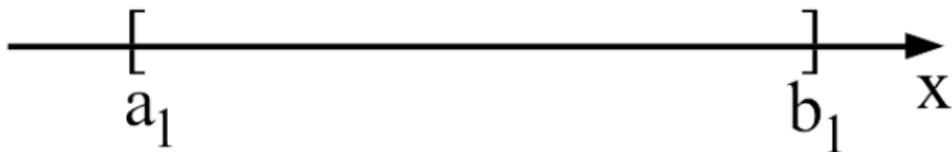
Принцип вложенных отрезков

Рассмотрим бесконечную последовательность отрезков $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots$



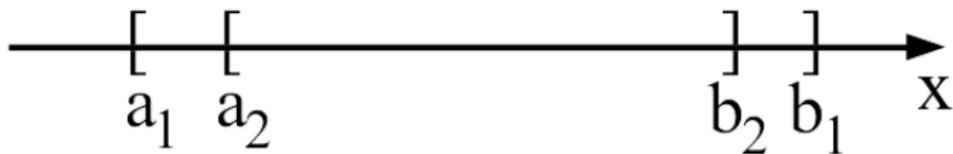
Принцип вложенных отрезков

Рассмотрим бесконечную последовательность отрезков $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots$



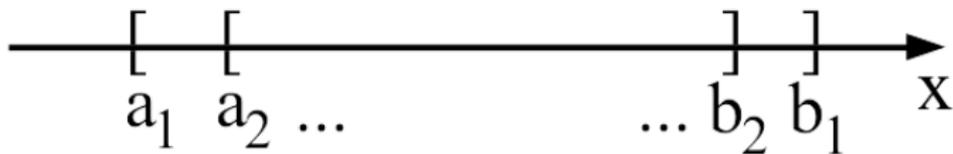
Принцип вложенных отрезков

Рассмотрим бесконечную последовательность отрезков $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots$



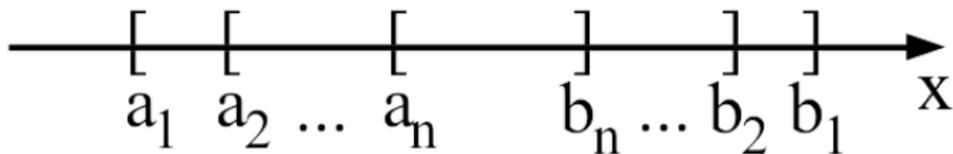
Принцип вложенных отрезков

Рассмотрим бесконечную последовательность отрезков $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots$



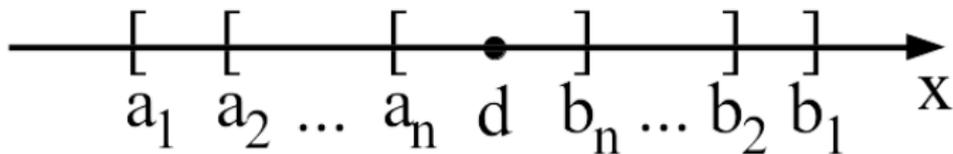
Принцип вложенных отрезков

Рассмотрим бесконечную последовательность отрезков $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots$



Принцип вложенных отрезков

Рассмотрим бесконечную последовательность отрезков $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots$



Принцип вложенных отрезков

Определение

Система отрезков $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots$ называется **системой вложенных отрезков**, если

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1.$$



Принцип вложенных отрезков

Определение

Говорят, что **длина вложенных отрезков стремится к нулю**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): |b_n - a_n| < \varepsilon.$$



Принцип вложенных отрезков

Расшифровка математических символов:



Принцип вложенных отрезков

Расшифровка математических символов:

$\forall \varepsilon > 0$ - для любого положительного ε



Принцип вложенных отрезков

Расшифровка математических символов:

$\forall \varepsilon > 0$ - для любого положительного ε

$\exists n(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ - существует натуральное число n ,
зависящее от ε , такое что



Принцип вложенных отрезков

Расшифровка математических символов:

$\forall \varepsilon > 0$ - для любого положительного ε

$\exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ - существует натуральное число n ,
зависящее от ε , такое что

$\forall n > n(\varepsilon)$ - для любого натурального числа n ,
превосходящего $n(\varepsilon)$



Принцип вложенных отрезков

Расшифровка математических символов:

$\forall \varepsilon > 0$ - для любого положительного ε

$\exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ - существует натуральное число n ,
зависящее от ε , такое что

$\forall n > n(\varepsilon)$ - для любого натурального числа n ,
превосходящего $n(\varepsilon)$

: - выполняется



Принцип вложенных отрезков

Расшифровка математических символов:

$\forall \varepsilon > 0$ - для любого положительного ε

$\exists n(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ - существует натуральное число n ,
зависящее от ε , такое что

$\forall n > n(\varepsilon)$ - для любого натурального числа n ,
превосходящего $n(\varepsilon)$

: - выполняется

$|b_n - a_n| < \varepsilon$ - модуль разности b_n и a_n
меньше ε .



Принцип вложенных отрезков

Теорема (принцип вложенных отрезков)



Принцип вложенных отрезков

Теорема (принцип вложенных отрезков)

Для всякой системы вложенных отрезков $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \dots$ с длинами, стремящимися к нулю, существует единственная точка d , которая принадлежит всем отрезкам системы, причем $d = \sup\{a_n\} = \inf\{b_n\}$.



Числовая функция



Числовая функция

Определение

Числовая функция - это правило, ставящее в соответствие каждому элементу некоторого числового множества X некоторое число из множества действительных чисел



Числовая функция

Определение

Числовая функция - это правило, ставящее в соответствие каждому элементу некоторого числового множества X некоторое число из множества действительных чисел

Обозначение: $y = f(x)$



Числовая функция

Определение

Числовая функция - это правило, ставящее в соответствие каждому элементу некоторого числового множества X некоторое число из множества действительных чисел

Обозначение: $y = f(x)$

x - независимая переменная



Числовая функция

Определение

Числовая функция - это правило, ставящее в соответствие каждому элементу некоторого числового множества X некоторое число из множества действительных чисел

Обозначение: $y = f(x)$

x - независимая переменная

y - зависимая переменная



Числовая функция

Определение

Числовая функция - это правило, ставящее в соответствие каждому элементу некоторого числового множества X некоторое число из множества действительных чисел

Обозначение: $y = f(x)$

x - независимая переменная

y - зависимая переменная

$X = D(f)$ - область определения



Числовая функция

Определение

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек $(x, f(x))$, где $x \in X$.



Числовая функция

Определение

Пусть дана функция $y = f(x)$. Функция, ставящая в соответствие каждому числу y соответствующее значение x , называется **функцией, обратной данной**, или **обратной функцией**.



Числовая функция

Определение

Пусть дана функция $y = f(x)$. Функция, ставящая в соответствие каждому числу y соответствующее значение x , называется **функцией, обратной данной**, или **обратной функцией**.

Обозначение: $x = f^{-1}(y)$



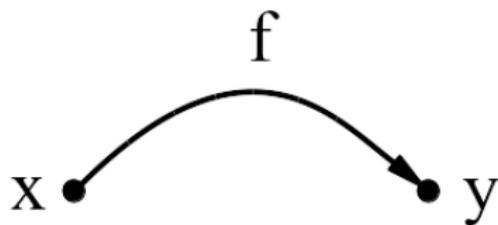
Числовая функция

$x \bullet$

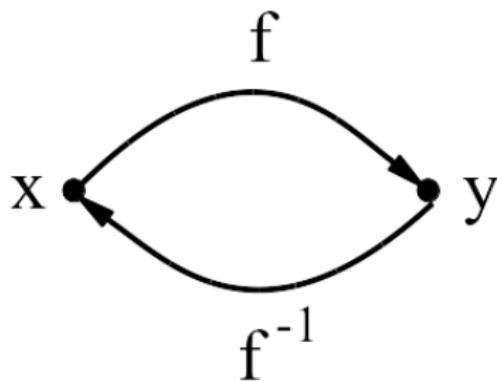
$\bullet y$



Числовая функция



Числовая функция



Числовая функция

Определение

Пусть даны функции $y = f(x)$ и $z = g(y)$.

Функция $z = g(f(x))$ называется **сложной функцией** или **композицией функций** или **суперпозицией функций** f и g .



Числовая функция

Определение

Пусть даны функции $y = f(x)$ и $z = g(y)$.

Функция $z = g(f(x))$ называется **сложной функцией** или **композицией функций** или **суперпозицией функций** f и g .

Обозначение: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$



Числовая функция

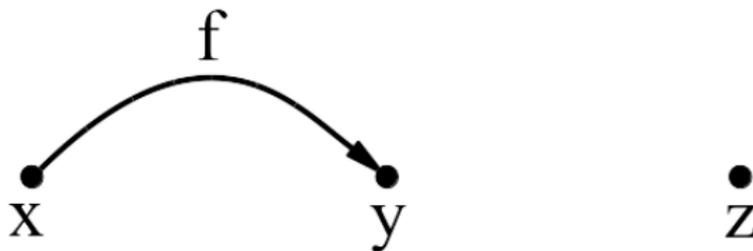
\dot{x}

\dot{y}

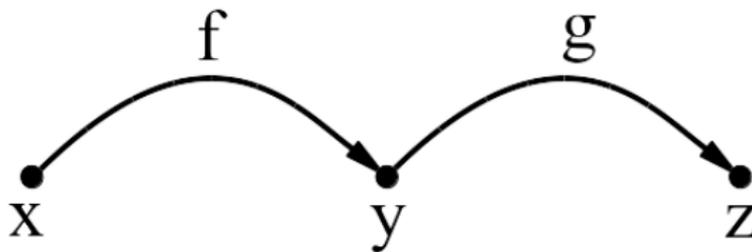
\dot{z}



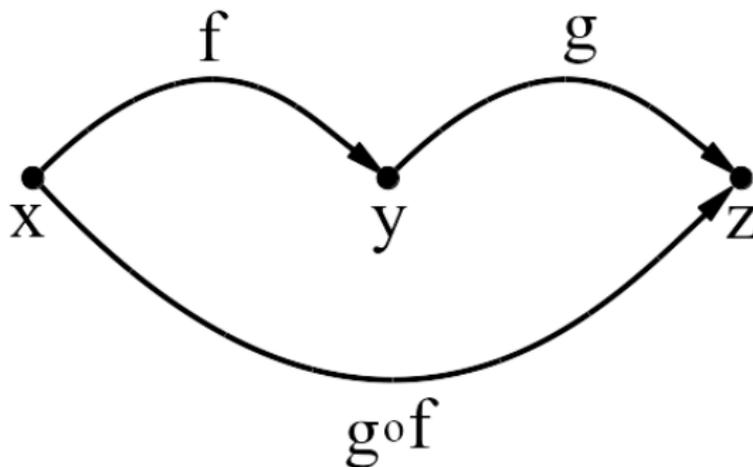
Числовая функция



Числовая функция



Числовая функция



Элементарные функции



Элементарные функции

К основным элементарным функциям относятся:



Элементарные функции

К основным элементарным функциям относятся:

1) $y = x^\alpha$ - степенная функция



Элементарные функции

К основным элементарным функциям относятся:

1) $y = x^\alpha$ - степенная функция

2) $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ - показательная функция



Элементарные функции

К основным элементарным функциям относятся:

1) $y = x^\alpha$ - степенная функция

2) $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ - показательная функция

3) $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ - логарифмическая функция



Элементарные функции

К основным элементарным функциям относятся:

4) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ - тригонометрические функции



Элементарные функции

К основным элементарным функциям относятся:

4) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ - тригонометрические функции

5) $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$,
 $y = \operatorname{arcctg} x$ - обратные тригонометрические функции



Элементарные функции

Определение

Функция называется **элементарной**, если она задана с помощью формулы, содержащей конечное число арифметических операций и суперпозиций основных элементарных функций.



Элементарные функции

Определение

Функция называется **элементарной**, если она задана с помощью формулы, содержащей конечное число арифметических операций и суперпозиций основных элементарных функций.

Примеры: $y = 2x^2 + 3x + 5,$

$$y = \sin(2^x),$$

$$y = \operatorname{tg} \sqrt{x^3 + x^2}.$$



Элементарные функции

Пример функции, которая не является элементарной:

$$y = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ \sin x, & x > 0. \end{cases}$$



Элементарные функции

Классификация элементарных функций



Элементарные функции

Классификация элементарных функций

1) многочлен (полином)



Элементарные функции

Классификация элементарных функций

1) многочлен (полином)

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$



Элементарные функции

Классификация элементарных функций

1) многочлен (полином)

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

2) рациональная функция

(дробно-рациональная функция)



Элементарные функции

Классификация элементарных функций

1) многочлен (полином)

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

2) рациональная функция

(дробно-рациональная функция)

$$y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, \text{ где } P_n(x) \text{ и } Q_m(x) - \text{ полиномы}$$



Элементарные функции

Классификация элементарных функций

3) иррациональная функция



Элементарные функции

Классификация элементарных функций

3) иррациональная функция - это функция, содержащая иррациональности



Элементарные функции

Классификация элементарных функций

3) иррациональная функция - это функция, содержащая иррациональности

$$y = x + \sqrt[3]{x}.$$



Элементарные функции

Классификация элементарных функций

3) иррациональная функция - это функция, содержащая иррациональности

$$y = x + \sqrt[3]{x}.$$

4) трансцендентная функция



Элементарные функции

Классификация элементарных функций

3) иррациональная функция - это функция, содержащая иррациональности

$$y = x + \sqrt[3]{x}.$$

4) трансцендентная функция - это функция, содержащая тригонометрические, обратные тригонометрические, показательные и логарифмические функции.



Элементарные функции

Классификация элементарных функций

3) иррациональная функция - это функция, содержащая иррациональности

$$y = x + \sqrt[3]{x}.$$

4) трансцендентная функция - это функция, содержащая тригонометрические, обратные тригонометрические, показательные и логарифмические функции.

$$y = x + \sin x + \sqrt{x}$$



Числовая последовательность



Числовая последовательность

Определение

Пусть каждому натуральному числу n поставлено в соответствие действительное число a_n . Совокупность чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ называется **числовой последовательностью**.



Числовая последовательность

Определение

Пусть каждому натуральному числу n поставлено в соответствие действительное число a_n . Совокупность чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ называется **числовой последовательностью**.

Обозначение: $\{a_n\}$



Числовая последовательность

Определение

Пусть каждому натуральному числу n поставлено в соответствие действительное число a_n . Совокупность чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ называется **числовой последовательностью**.

Обозначение: $\{a_n\}$ - числовая последовательность с общим членом a_n .



Числовая последовательность

Определение

Число a_n называется **n -ым членом последовательности** и задается формулой $a_n = f(n)$.



Числовая последовательность

Определение

Число a_n называется **n -ым членом последовательности** и задается формулой $a_n = f(n)$.

Примеры: $a_n = 1/2^n$, $a_n = (-1)^n \cdot n^3$.



Числовая последовательность

Экономический пример:



Числовая последовательность

Экономический пример: Допустим, мы открываем в банке вклад на 10 тыс. руб. под 10% годовых с капитализацией процентов и периодом капитализации 1 год.



Числовая последовательность

Экономический пример: Допустим, мы открываем в банке вклад на 10 тыс. руб. под 10% годовых с капитализацией процентов и периодом капитализации 1 год. Тогда величина вклада по годам будет представлять собой числовую последовательность $a_1 = 10$, $a_2 = 10 \cdot 1,1$, $a_3 = 10 \cdot 1,1^2, \dots, a_n = 10 \cdot 1,1^{n-1}$, \dots , где a_n - размер вклада в течение n -ого года.



Числовая последовательность

Определение

Число a называется **пределом** последовательности $\{a_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): |a_n - a| < \varepsilon.$$



Числовая последовательность

Определение

Число a называется **пределом последовательности** $\{a_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): |a_n - a| < \varepsilon.$$

Обозначение: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.



Числовая последовательность

Определение

Число a называется **пределом последовательности** $\{a_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon): |a_n - a| < \varepsilon.$$

Обозначение: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Здесь a - конечное число, т.е. $a \neq \pm\infty$. Поэтому определенный таким образом предел часто называют **конечным пределом**.



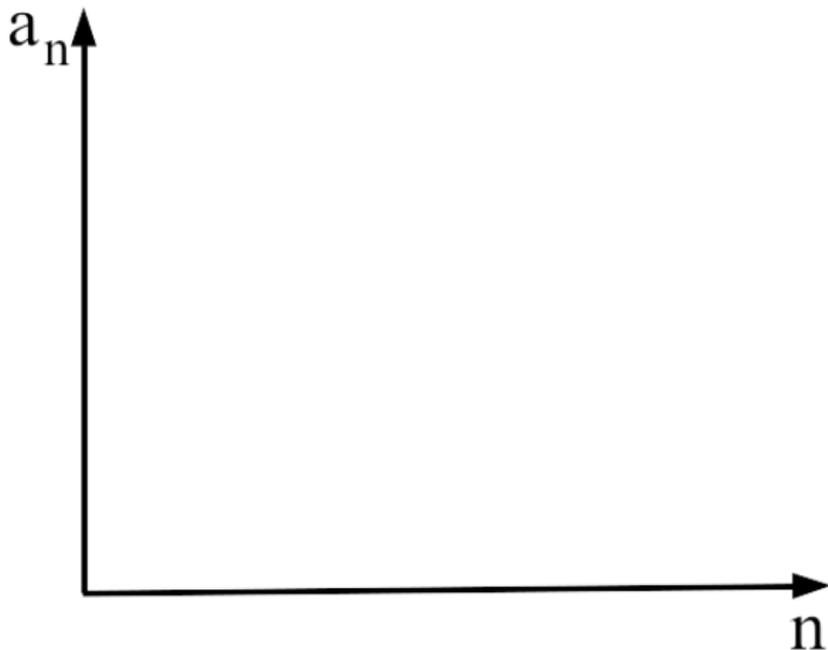
Числовая последовательность

Геометрическая интерпретация предела:



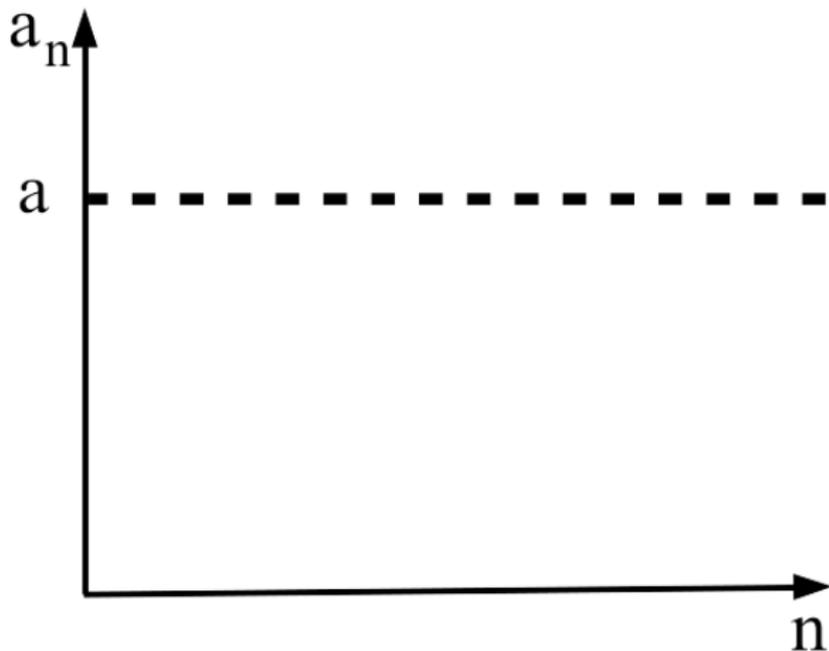
Числовая последовательность

Геометрическая интерпретация предела:



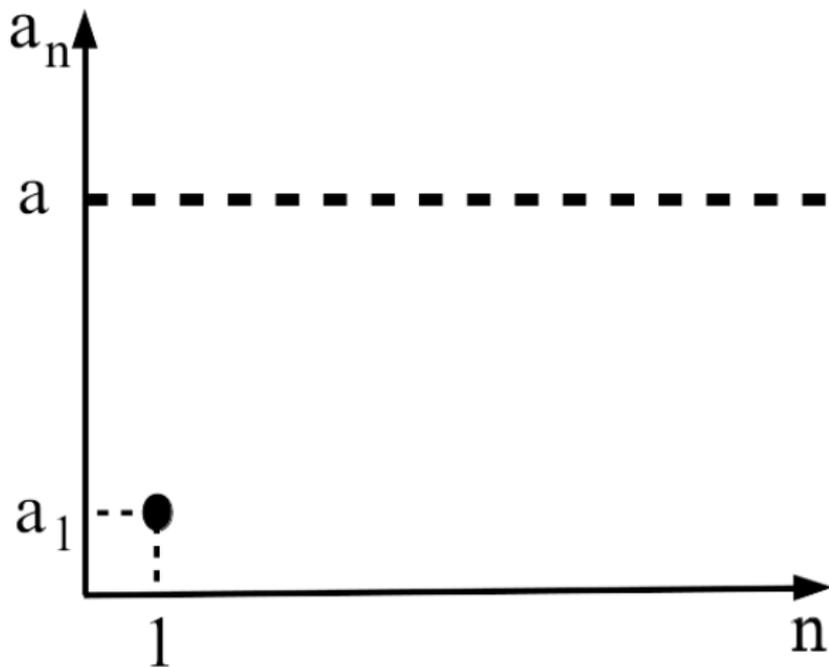
Числовая последовательность

Геометрическая интерпретация предела:



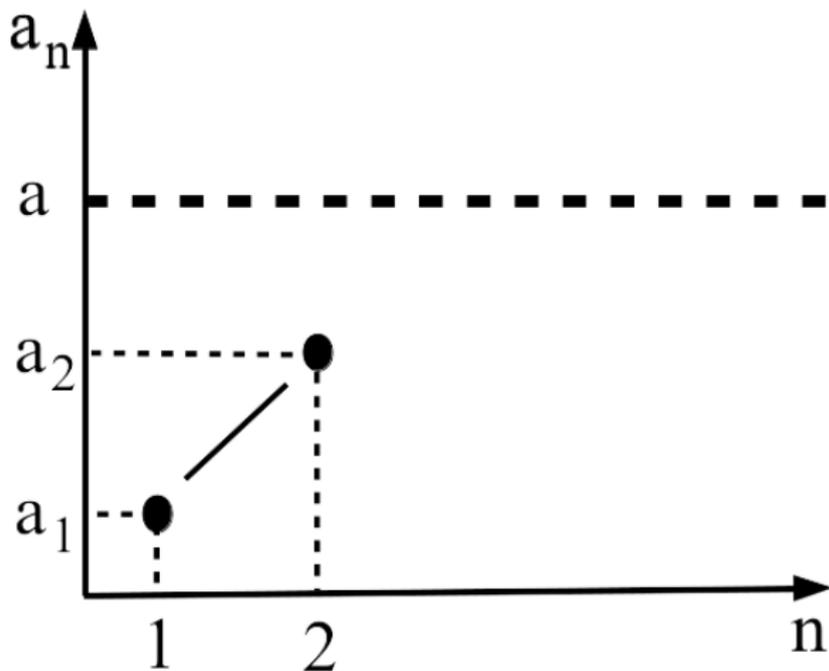
Числовая последовательность

Геометрическая интерпретация предела:



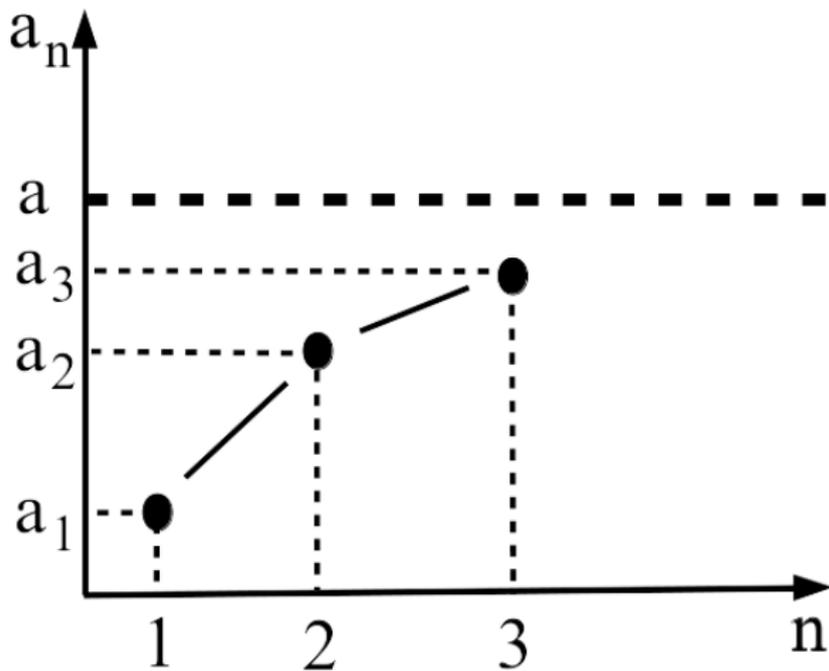
Числовая последовательность

Геометрическая интерпретация предела:



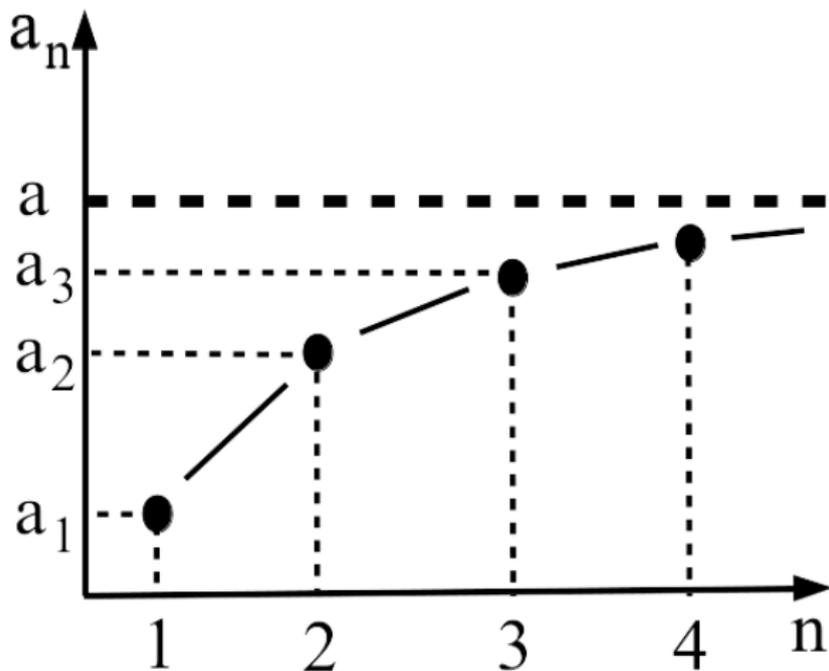
Числовая последовательность

Геометрическая интерпретация предела:



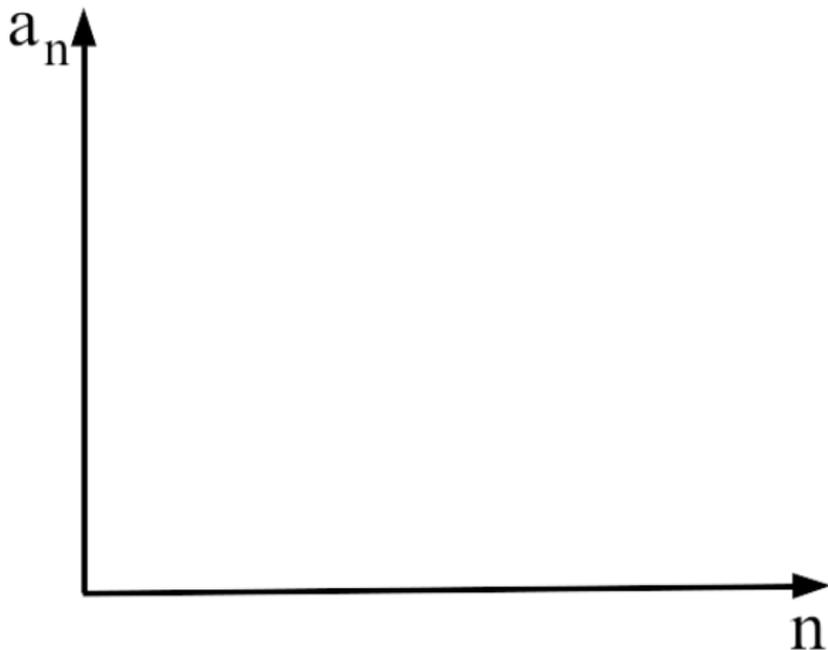
Числовая последовательность

Геометрическая интерпретация предела:



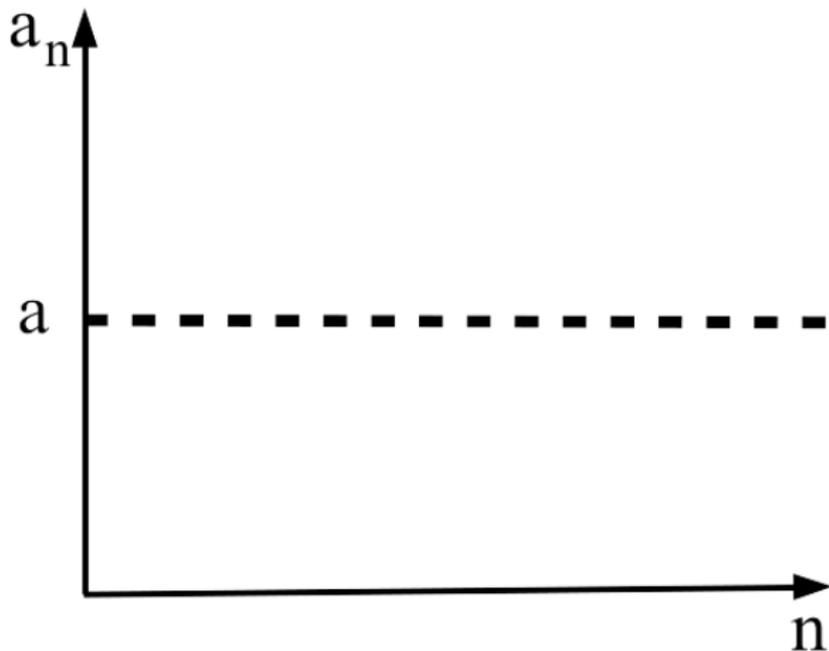
Числовая последовательность

Геометрическая интерпретация предела:



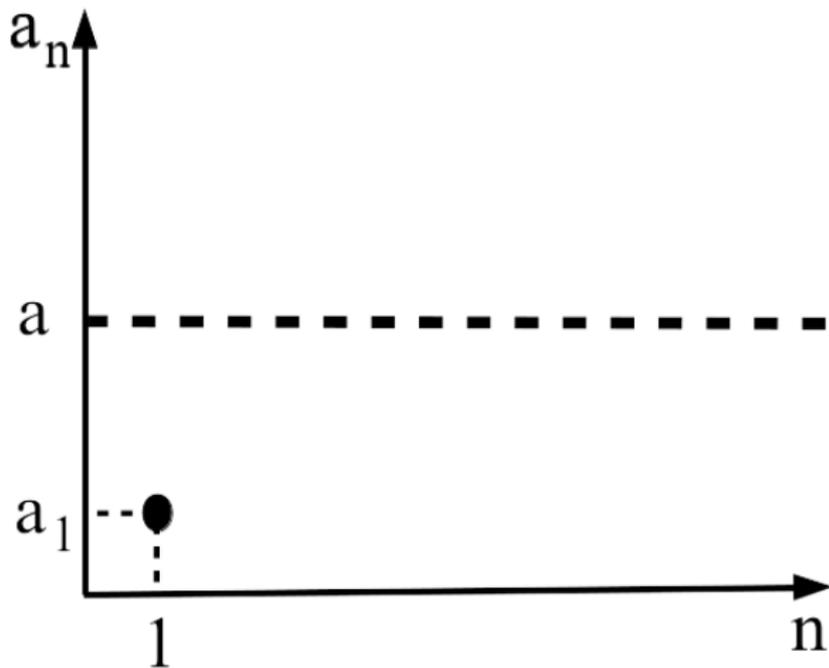
Числовая последовательность

Геометрическая интерпретация предела:



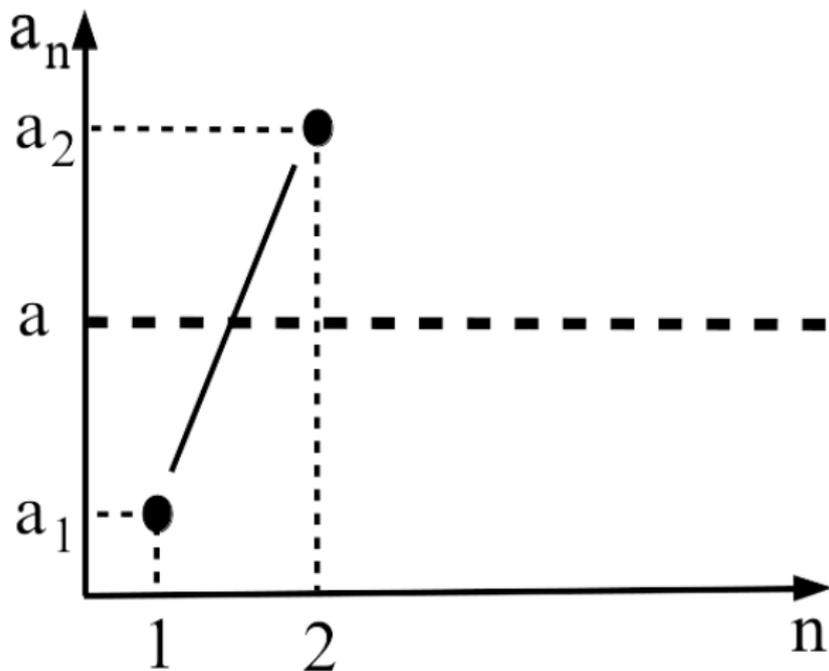
Числовая последовательность

Геометрическая интерпретация предела:



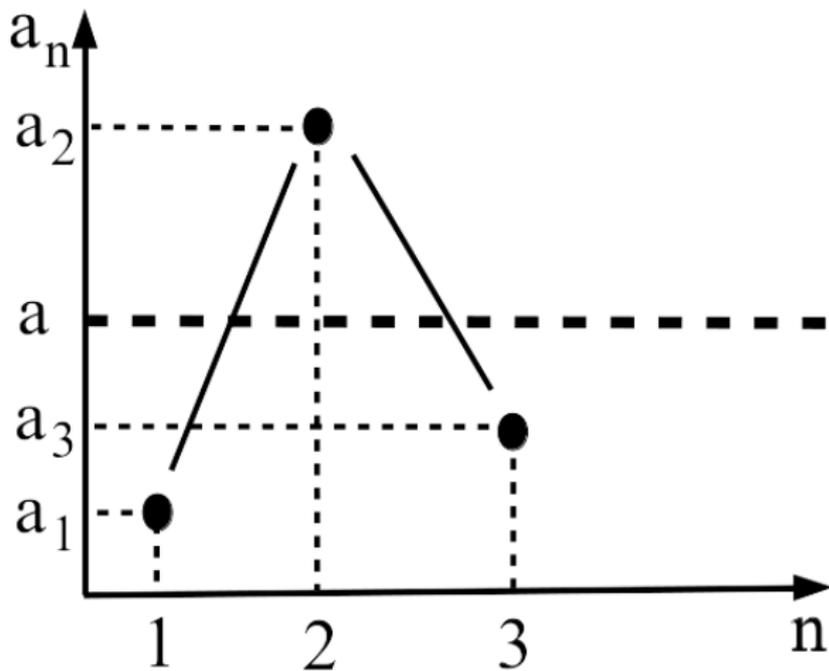
Числовая последовательность

Геометрическая интерпретация предела:



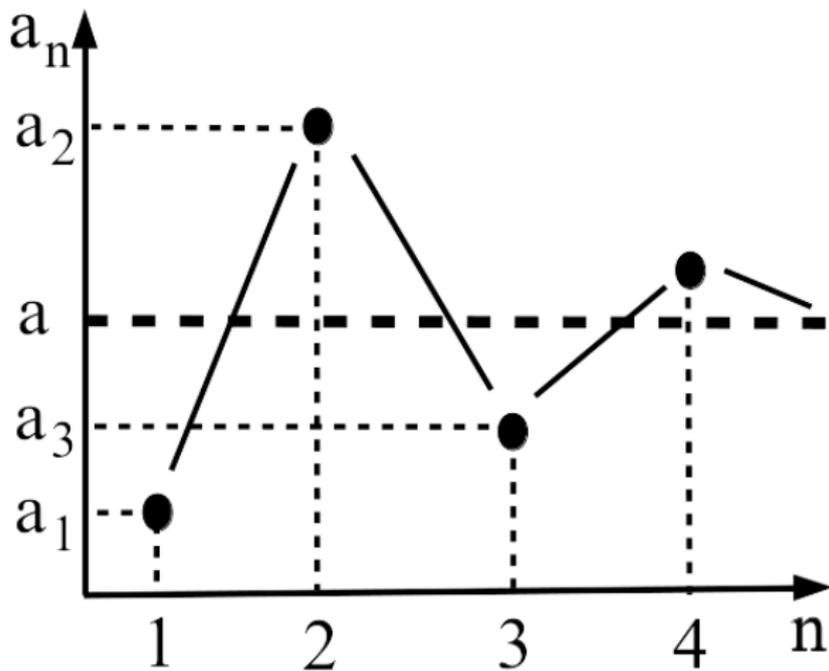
Числовая последовательность

Геометрическая интерпретация предела:



Числовая последовательность

Геометрическая интерпретация предела:



Числовая последовательность

Определение

Если последовательность имеет конечный предел, то она называется **сходящейся**. В противном случае она называется **расходящейся**.



*Арифметические свойства конечных пределов**



Числовая последовательность

*Арифметические свойства конечных пределов**

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$. Тогда



Числовая последовательность

*Арифметические свойства конечных пределов**

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$. Тогда

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = a + b$$



Арифметические свойства конечных пределов*

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$. Тогда

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = a + b$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = a - b$$



Арифметические свойства конечных пределов*

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$. Тогда

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = a + b$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = a - b$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b$$



Арифметические свойства конечных пределов*

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$. Тогда

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = a + b$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = a - b$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n / y_n) = a / b, \text{ если } b \neq 0.$$



Доказательство свойства 1



Доказательство свойства 1

Дано:



Числовая последовательность

Доказательство свойства 1

Дано: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ (1)



Числовая последовательность

Доказательство свойства 1

Дано: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ (1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \quad (2)$$



Числовая последовательность

Доказательство свойства 1

Дано: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ (1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \quad (2)$$

Доказать:



Числовая последовательность

Доказательство свойства 1

Дано: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ (1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \quad (2)$$

Доказать: $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = a + b$ (3)



Числовая последовательность

Последовательность $\{x_n + y_n\}$ имеет предел $a + b$, если согласно определению предела числовой последовательности



Числовая последовательность

Последовательность $\{x_n + y_n\}$ имеет предел $a + b$, если согласно определению предела числовой последовательности

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbf{N} \forall n > n(\varepsilon):$$



Числовая последовательность

Последовательность $\{x_n + y_n\}$ имеет предел $a + b$, если согласно определению предела числовой последовательности

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbf{N} \forall n > n(\varepsilon):$$

$$|x_n + y_n - a - b| < \varepsilon.$$



Числовая последовательность

Последовательность $\{x_n + y_n\}$ имеет предел $a + b$, если согласно определению предела числовой последовательности

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbf{N} \forall n > n(\varepsilon):$$
$$|x_n + y_n - a - b| < \varepsilon. \quad (4)$$



Числовая последовательность

Последовательность $\{x_n + y_n\}$ имеет предел $a + b$, если согласно определению предела числовой последовательности

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n(\varepsilon):$$
$$|x_n + y_n - a - b| < \varepsilon. \quad (4)$$

Значит, нам надо найти $n(\varepsilon)$, при котором выполняется неравенство (4).



Числовая последовательность

(1) \Rightarrow



Числовая последовательность

$$(1) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n_1(\varepsilon):$$



Числовая последовательность

$$(1) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n_1(\varepsilon): \\ |x_n - a| < \varepsilon/2.$$



Числовая последовательность

$$(1) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n_1(\varepsilon):$$

$$|x_n - a| < \varepsilon/2.$$

$$(2) \Rightarrow$$



Числовая последовательность

$$(1) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n_1(\varepsilon):$$

$$|x_n - a| < \varepsilon/2.$$

$$(2) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n_2(\varepsilon):$$



Числовая последовательность

$$(1) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_1(\varepsilon) \in \mathbf{N} \forall n > n_1(\varepsilon):$$

$$|x_n - a| < \varepsilon/2.$$

$$(2) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_2(\varepsilon) \in \mathbf{N} \forall n > n_2(\varepsilon):$$

$$|y_n - b| < \varepsilon/2.$$



Числовая последовательность

$$(1) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n_1(\varepsilon):$$

$$|x_n - a| < \varepsilon/2.$$

$$(2) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n_2(\varepsilon):$$

$$|y_n - b| < \varepsilon/2.$$

$$\text{Пусть } n(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}. \quad (5)$$



Числовая последовательность

$$(1) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n_1(\varepsilon):$$

$$|x_n - a| < \varepsilon/2.$$

$$(2) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > n_2(\varepsilon):$$

$$|y_n - b| < \varepsilon/2.$$

$$\text{Пусть } n(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}. \quad (5)$$

Тогда $\forall n > n(\varepsilon)$ будут одновременно выполняться неравенства $|x_n - a| < \varepsilon/2$ и $|y_n - b| < \varepsilon/2$.



Числовая последовательность

Следовательно,



Числовая последовательность

Следовательно,

$$|x_n + y_n - a - b| =$$



Числовая последовательность

Следовательно,

$$|x_n + y_n - a - b| = |x_n - a + y_n - b|$$



Числовая последовательность

Следовательно,

$$\begin{aligned} |x_n + y_n - a - b| &= |x_n - a + y_n - b| \leq \\ &\leq |x_n - a| + |y_n - b| \end{aligned}$$



Числовая последовательность

Следовательно,

$$\begin{aligned} |x_n + y_n - a - b| &= |x_n - a + y_n - b| \leq \\ &\leq |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \end{aligned}$$



Числовая последовательность

Следовательно,

$$\begin{aligned} |x_n + y_n - a - b| &= |x_n - a + y_n - b| \leq \\ &\leq |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$



Числовая последовательность

Следовательно,

$$\begin{aligned} |x_n + y_n - a - b| &= |x_n - a + y_n - b| \leq \\ &\leq |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Это означает, что при задании $n(\varepsilon)$ по формуле (5) неравенство (4) будет выполняться,



Числовая последовательность

Следовательно,

$$\begin{aligned} |x_n + y_n - a - b| &= |x_n - a + y_n - b| \leq \\ &\leq |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Это означает, что при задании $n(\varepsilon)$ по формуле (5) неравенство (4) будет выполняться, а значит, справедлива формула (3). ■

