

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Математический анализ

Лекция 4.4

к.ф.-м.н. Семакин А.Н.



Неявные функции



Неявные функции

Определение

Функция $y = y(x)$, где $x = (x_1, \dots, x_n)$, называется неявной функцией, заданной уравнением $F(x, y) = 0$, если выполняется равенство $F(x, y(x)) = 0$.



Неявные функции

Пример:



Неявные функции

Пример:

Функция $y = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$ может быть неявно задана уравнением $x_1^2 + x_2^2 + y^2 = 1$.



Неявные функции

*Теорема (о существовании и
дифференцируемости неявной функции)*



Неявные функции

Теорема (о существовании и дифференцируемости неявной функции)

Пусть выполняются следующие условия:



Неявные функции

Теорема (о существовании и дифференцируемости неявной функции)

Пусть выполняются следующие условия:

1) функция $F(x, y)$ определена и непрерывна в некоторой окрестности точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$



Неявные функции

Теорема (о существовании и дифференцируемости неявной функции)

Пусть выполняются следующие условия:

1) функция $F(x, y)$ определена и непрерывна в некоторой окрестности точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$ и имеет в этой точке непрерывные частные производные $\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial x_i}, i = \overline{1, n}$,



Неявные функции

$$2) F(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0,$$



Неявные функции

$$2) F(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0,$$

$$3) \frac{\partial F(x^{(0)}, y^{(0)})}{\partial y} \neq 0.$$



Неявные функции

$$2) F(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0,$$

$$3) \frac{\partial F(x^{(0)}, y^{(0)})}{\partial y} \neq 0.$$

Тогда



Неявные функции

$$2) F(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0,$$

$$3) \frac{\partial F(x^{(0)}, y^{(0)})}{\partial y} \neq 0.$$

Тогда

1) существует окрестность точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$,



Неявные функции

$$2) F(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0,$$

$$3) \frac{\partial F(x^{(0)}, y^{(0)})}{\partial y} \neq 0.$$

Тогда

1) существует окрестность точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$, в которой уравнение $F(x, y) = 0$ определяет единственную непрерывную функцию $y(x)$



Неявные функции

$$2) F(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0,$$

$$3) \frac{\partial F(x^{(0)}, y^{(0)})}{\partial y} \neq 0.$$

Тогда

1) существует окрестность точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$, в которой уравнение $F(x, y) = 0$ определяет единственную непрерывную функцию $y(x)$ такую, что $y(x^{(0)}) = y^{(0)}$,



Неявные функции

2) частные производные $\frac{\partial y}{\partial x_i}, i = \overline{1, n}$
определены и непрерывны в некоторой
окрестности точки $x^{(0)}$



Неявные функции

2) частные производные $\frac{\partial y}{\partial x_i}$, $i = \overline{1, n}$ определены и непрерывны в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$ и в этой точке вычисляются по формуле

$$\frac{\partial y(x^{(0)})}{\partial x_i} = - \frac{\partial F(x^{(0)}, y^{(0)})}{\partial x_i} / \frac{\partial F(x^{(0)}, y^{(0)})}{\partial y}.$$



Неявные функции

Определение

Функции $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, ..., $y_m = y_m(x)$, где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, называются неявными функциями, заданными системой уравнений

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, \dots, y_m) = 0, \\ F_2(x, y_1, \dots, y_m) = 0, \\ \dots \\ F_m(x, y_1, \dots, y_m) = 0, \end{cases}$$



Неявные функции

если выполняются равенства

$$\begin{cases} F_1(x, y_1(x), \dots, y_m(x)) = 0, \\ F_2(x, y_1(x), \dots, y_m(x)) = 0, \\ \dots \\ F_m(x, y_1(x), \dots, y_m(x)) = 0. \end{cases}$$



Неявные функции

Теорема (о существовании и дифференцируемости системы неявных функций)



Неявные функции

Теорема (о существовании и дифференцируемости системы неявных функций)

Пусть выполняются следующие условия:



Неявные функции

Теорема (о существовании и дифференцируемости системы неявных функций)

Пусть выполняются следующие условия:

1) функции $F_i(x, y_1, \dots, y_m)$, $i = \overline{1, m}$

определены и непрерывны в некоторой окрестности точки $(x^{(0)}, y_1^{(0)}, \dots, y_m^{(0)})$ вместе со своими частными производными,



Неявные функции

Теорема (о существовании и дифференцируемости системы неявных функций)

Пусть выполняются следующие условия:

1) функции $F_i(x, y_1, \dots, y_m)$, $i = \overline{1, m}$

определены и непрерывны в некоторой окрестности точки $(x^{(0)}, y_1^{(0)}, \dots, y_m^{(0)})$ вместе со своими частными производными,

2) $F_i(x^{(0)}, y_1^{(0)}, \dots, y_m^{(0)}) = 0$, $i = \overline{1, m}$,



Неявные функции

3) якобиан

$$\frac{\partial(F_1, \dots, F_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}$$



Неявные функции

3) якобиан

$$\frac{\partial(F_1, \dots, F_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}$$

не равен нулю в точке $(x^{(0)}, y_1^{(0)}, \dots, y_m^{(0)})$.



Неявные функции

Тогда



Неявные функции

Тогда

1) существует окрестность точки
 $(x^{(0)}, y_1^{(0)}, \dots, y_m^{(0)})$,



Неявные функции

Тогда

1) существует окрестность точки $(x^{(0)}, y_1^{(0)}, \dots, y_m^{(0)})$, в которой система уравнений $F_i(x, y_1, \dots, y_m) = 0, i = \overline{1, m}$ определяет единственную систему функций $y_i = y_i(x), i = \overline{1, m}$



Неявные функции

Тогда

1) существует окрестность точки $(x^{(0)}, y_1^{(0)}, \dots, y_m^{(0)})$, в которой система уравнений $F_i(x, y_1, \dots, y_m) = 0, i = \overline{1, m}$ определяет единственную систему функций $y_i = y_i(x), i = \overline{1, m}$ таких, что $y_i^{(0)} = y_i(x^{(0)}), i = \overline{1, m}$,



Неявные функции

2) функции $y_i = y_i(x)$, $i = \overline{1, m}$ непрерывно дифференцируемы в окрестности точки $x^{(0)}$,



Неявные функции

- 2) функции $y_i = y_i(x)$, $i = \overline{1, m}$ непрерывно дифференцируемы в окрестности точки $x^{(0)}$,
- 3) частные производные $\frac{\partial y_j}{\partial x_i}$ в точке $x^{(0)}$ могут быть найдены из системы

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial F_i}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_k} + \frac{\partial F_i}{\partial x_k} = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, n}.$$



Касательная плоскость и нормаль к поверхности



Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть в 3-хмерном пространстве R^3 задана поверхность S с помощью уравнения $F(x, y, z) = 0$.



Определение

Прямая l , проходящая через заданную точку M поверхности S , называется касательной прямой к поверхности S в точке M , если l является касательной к какой-нибудь кривой, целиком лежащей на поверхности S .



Определение

Плоскость, в которой лежат все касательные прямые к поверхности S в точке M , называется касательной плоскостью к поверхности S в точке M .



Определение

Прямая, перпендикулярная касательной плоскости и проходящая через точку M , называется нормалью к поверхности S в точке M .



Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Уравнение касательной плоскости:

$$F'_x(M)(x-x_0)+F'_y(M)(y-y_0)+F'_z(M)(z-z_0) = 0.$$



Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Уравнение касательной плоскости:

$$F'_x(M)(x-x_0) + F'_y(M)(y-y_0) + F'_z(M)(z-z_0) = 0.$$

Канонические уравнения нормали:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M)}.$$



Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Уравнение касательной плоскости:

$$F'_x(M)(x-x_0) + F'_y(M)(y-y_0) + F'_z(M)(z-z_0) = 0.$$

Канонические уравнения нормали:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M)}.$$

Здесь x_0, y_0, z_0 - координаты точки M .



Производная по направлению и градиент



Производная по направлению и градиент

Пусть функция $f(x, y, z)$ определена в некоторой ε -окрестности $U(x_0, y_0, z_0; \varepsilon)$ точки (x_0, y_0, z_0) .



Производная по направлению и градиент

Пусть функция $f(x, y, z)$ определена в некоторой ε -окрестности $U(x_0, y_0, z_0; \varepsilon)$ точки (x_0, y_0, z_0) .

Через точку (x_0, y_0, z_0) проведем прямую P в направлении вектора $\bar{e} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, где $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ - направляющие косинусы данного вектора.



Параметрические уравнения прямой P имеют вид:

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cos \alpha, \\ y = y_0 + t \cos \beta, \\ z = z_0 + t \cos \gamma. \end{cases}$$



Подставив эти уравнения в функцию

$f(x, y, z)$, получим новую функцию

$$F(t) = f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta, z_0 + t \cos \gamma),$$

которая определена в точках прямой P .



Производная по направлению и градиент

Определение

Производная $\frac{dF}{dt}$ в точке $t = 0$ называется производной функции $f(x)$ в точке (x_0, y_0, z_0) в направлении вектора \bar{e} .



Производная по направлению и градиент

Определение

Производная $\frac{dF}{dt}$ в точке $t = 0$ называется производной функции $f(x)$ в точке (x_0, y_0, z_0) в направлении вектора \bar{e} .

Обозначение:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial \bar{e}}.$$



Производная по направлению и градиент

Формула для вычисления:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{e}} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma.$$



Производная по направлению и градиент

Определение

Градиентом функции $f(x)$ называется вектор с координатами

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}.$$



Производная по направлению и градиент

Определение

Градиентом функции $f(x)$ называется вектор с координатами

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Обозначение: ∇f , $\text{grad} f$.



Таким образом,

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$



Свойства производной по направлению и градиента



Производная по направлению и градиент

Свойства производной по направлению и градиента

$$1. \frac{\partial f}{\partial \bar{e}} = (\operatorname{grad} f, \bar{e}) = |\operatorname{grad} f| \cdot \cos(\bar{e}, \operatorname{grad} f).$$



Производная по направлению и градиент

Свойства производной по направлению и градиента

1. $\frac{\partial f}{\partial \bar{e}} = (\operatorname{grad} f, \bar{e}) = |\operatorname{grad} f| \cdot \cos(\bar{e}, \operatorname{grad} f).$

2. $\operatorname{grad} f$ показывает направление наибольшего возрастания функции f .



Производная по направлению и градиент

Свойства производной по направлению и градиента

1. $\frac{\partial f}{\partial \bar{e}} = (\operatorname{grad} f, \bar{e}) = |\operatorname{grad} f| \cdot \cos(\bar{e}, \operatorname{grad} f).$

2. $\operatorname{grad} f$ показывает направление наибольшего возрастания функции f .

3. Если $\bar{e} = \operatorname{grad} f$, то $\frac{\partial f}{\partial \bar{e}} = |\operatorname{grad} f|.$



Производная по направлению и градиент

Свойства производной по направлению и градиента

1. $\frac{\partial f}{\partial \bar{e}} = (\operatorname{grad} f, \bar{e}) = |\operatorname{grad} f| \cdot \cos(\bar{e}, \operatorname{grad} f).$

2. $\operatorname{grad} f$ показывает направление наибольшего возрастания функции f .

3. Если $\bar{e} = \operatorname{grad} f$, то $\frac{\partial f}{\partial \bar{e}} = |\operatorname{grad} f|.$

4. Если $\bar{e} \perp \operatorname{grad} f$, то $\frac{\partial f}{\partial \bar{e}} = 0.$

