Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Высшая математика»

Е. Б. Павельева, В. Я. Томашпольский

Линейная алгебра

**Методические указания
к выполнению типового расчета**

Для студентов всех специальностей

УДК: 512.64

Москва
2010

Оглавление

Введение

В работе приведены все основные определения и формулировки теорем по следующим разделам линейной алгебры: линейное пространство, евклидово пространство, линейные операторы, линейные операторы в евклидовых пространствах, квадратичные формы, приведение уравнений кривых и поверхностей второго порядка к каноническому виду.

В работе разобрано большое количество задач как стандартных, так и повышенной сложности. Разобран типовой расчет по линейной алгебре. В конце каждой главы приведены задачи для самостоятельного решения.

Пособие полезно всем студентам, изучающим линейную алгебру.

Глава I. Линейное пространство

1.1. Определение и примеры линейных пространств

Определение. Множество L элементов любой природы называется ***вещественным линейным пространством***, если выполнены следующие три условия.

1. Задано сложение элементов из L, т.е. задан закон, по которому любым двум элементам $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L$ ставится в соответствие элемент $\boldsymbol{z} \in L$, называемый суммой элементов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ и обозначаемый символом $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$.

2. Задано умножение элемента из L на действительное число, т.е. задан закон, по которому любому элементу $\boldsymbol{x} \in L$ и любому действительному числу λ ставится в соответствие элемент $\boldsymbol{z} \in L$, называемый произведением элемента $\boldsymbol{x}$ на действительное число λ и обозначаемый символом $\boldsymbol{z} = \lambda \cdot \boldsymbol{x}$.

3. Указанные два закона подчинены следующим восьми аксиомам:

1) $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x} \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L$ (аксиома коммутативности);

2) $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in L$ (аксиома ассоциативности);

3) существует нулевой элемент $\boldsymbol{\theta} \in L$, такой что $\forall \boldsymbol{x} \in L$ выполняется $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{x}$;

4) для каждого элемента $\boldsymbol{x} \in L$ существует противоположный элемент $\boldsymbol{x}' \in L$, такой что $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{\theta}$;

5) $1 \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \quad \forall \boldsymbol{x} \in L$;

6) $\lambda \cdot (\mu \cdot \boldsymbol{x}) = (\lambda\mu) \cdot \boldsymbol{x} \quad \forall \lambda, \mu \in R, \quad \forall \boldsymbol{x} \in L$;

7) $(\lambda + \mu) \cdot \boldsymbol{x} = \lambda \cdot \boldsymbol{x} + \mu \cdot \boldsymbol{x} \quad \forall \lambda, \mu \in R, \quad \forall \boldsymbol{x} \in L$ (аксиома дистрибутивности умножения на число относительно сложения чисел);

8) $\lambda \cdot (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \lambda \cdot \boldsymbol{x} + \lambda \cdot \boldsymbol{y} \quad \forall \lambda \in R, \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L$ (аксиома дистрибутивности умножения на число относительно сложения элементов).

Из аксиом 1) – 8) можно получить ряд простейших свойств линейных пространств.

1) В произвольном линейном пространстве существует единственный нулевой элемент $\boldsymbol{\theta}$.

2) Для каждого элемента $\boldsymbol{x} \in L$ существует единственный противоположный элемент $\boldsymbol{x}' \in L$.

3) $0 \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\theta} \quad \forall \boldsymbol{x} \in L$.

4) $-1 \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}' \quad \forall \boldsymbol{x} \in L$.

5) $\lambda \cdot \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta} \quad \forall \lambda \in R$.

Элементы линейного пространства будем называть векторами.

Приведем **примеры** конкретных линейных пространств.

1. Множество R всех действительных чисел. Операции сложения и умножения на число являются обычными операциями сложения и умножения действительных чисел.

2. Множества V_1, V_2, V_3 всех свободных векторов на прямой, на плоскости, в пространстве соответственно. Операции сложения векторов и умножения вектора на число определены в курсе аналитической геометрии.

3. Множество R^n упорядоченных наборов n действительных чисел, называемых арифметическими векторами (или множество матриц-строк длины n, элементами которых являются действительные числа): $R^n = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) | x_i \in R,\ i = 1, 2, ..., n\}$. Для любых элементов $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n)$ и $\boldsymbol{y} = (y_1, ..., y_{\mathrm{n}})$ из R^n определим операцию сложения и умножения на число следующим образом: $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$, $\lambda \cdot \boldsymbol{x} = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n)$. Нулевой и обратный элементы имеют вид: $\boldsymbol{\theta} = (0, ..., 0)$, $\boldsymbol{x}' = (-x_1, ..., -x_n)$. **Замечание.** Иногда из соображения удобства будем записывать арифметические векторы в виде столбцов.

4. Множество $M_{m \times n}$ всех вещественных матриц размера $m \times n$. Операции сложения матриц и умножения матрицы на число определены в курсе аналитической геометрии.

5. Множество $C[a, b]$ всех функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$. Операции сложения и умножения на число являются обычными операциями сложения функций и умножения функции на число.

6. Множество P_n всех алгебраических многочленов переменной x и степени, не превышающей n: $P_n = \{f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n \,|\, a_i \in R, i = 0, 1, ..., n\}$. Операции сложения и умножения на число являются обычными операциями сложения многочленов и умножения многочлена на число. Число $0 \in R$ по определению считается многочленом с нулевыми коэффициентами и называется нулевым многочленом.

Отметим, что множество всех алгебраических многочленов степени n не является линейным пространством. Сумма таких многочленов может оказаться степени ниже n. В качестве примера рассмотрим множество всех алгебраических многочленов второй степени. При сложении

$f(x)=x^2+3x+1$ с $g(x)=-x^2+2x$, получим $f(x)+g(x)=5x+1$ многочлен первой степени, не лежащий в рассматриваемом множестве.

7. Рассмотрим множество R_+ всех действительных положительных чисел. Если суммой двух чисел $x,y\in R_+$ считать обычную сумму двух действительных чисел $x+y$, а произведением числа λ на x – обычное произведение двух действительных чисел λx, то множество R_+ не является линейным пространством, т.к. операция умножения элемента $x\in R_+$ на отрицательное число выводит из этого множества. Введем операции сложения элементов и умножения на действительное число на множестве R_+ по-другому. Суммой двух чисел назовем их произведение: $x\oplus y=xy$, умножением числа x на действительное число λ назовем возведение x в степень λ: $\lambda\circ x=x^\lambda$. Обе операции не выводят из множества R_+. Легко проверить выполнение восьми аксиом:

1) $x\oplus y=xy=yx=y\oplus x$;

2) $(x\oplus y)\oplus z=(xy)z=x(yz)=x\oplus(y\oplus z)$;

3) нулевым элементом является число 1, действительно, $x\oplus\theta=x\oplus 1=x\cdot 1=x$;

4) противоположным произвольному числу $x\in R_+$ является число $x'=\dfrac{1}{x}$, действительно, $x\oplus x'=x\cdot\dfrac{1}{x}=1=\theta$;

5) $1\circ x=x^1=x$;

6) $\lambda\circ(\mu\circ x)=\left(x^\mu\right)^\lambda=x^{\mu\lambda}=x^{\lambda\mu}=(\lambda\mu)\circ x$;

7) $(\lambda+\mu)\circ x=x^{\lambda+\mu}=x^\lambda x^\mu=(\lambda\circ x)\oplus(\mu\circ x)$;

8) $\lambda\circ(x\oplus y)=(xy)^\lambda=x^\lambda y^\lambda=(\lambda\circ x)\oplus(\lambda\circ y)$.

Таким образом, множество R_+ с введенными операциями сложения элементов и умножения на действительное число является линейным пространством.

1.2. Линейная зависимость

Пусть L – вещественное линейное пространство.

Определение. ***Линейной комбинацией элементов*** $\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},\ldots,\boldsymbol{e_n}\in L$ называется выражение вида $\lambda_1\boldsymbol{e_1}+\lambda_2\boldsymbol{e_2}+\ldots+\lambda_n\boldsymbol{e_n}$, где $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\in R$ – действительные коэффициенты линейной комбинации. Линейная комбинация элементов называется ***тривиальной***, если все ее коэффициенты равны нулю и ***нетривиальной,*** если среди коэффициентов линейной комбинации хотя бы один отличен от нуля.

Определение. Система элементов $\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},\ldots,\boldsymbol{e_n}\in L$ называется ***линейно зависимой***, если существует нетривиальная линейная комбинация этих элементов, равная нулевому элементу, т.е. если существуют числа

$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in R$, одновременно не равные нулю и такие, что $\lambda_1 \boldsymbol{e_1} + \lambda_2 \boldsymbol{e_2} + ... + \lambda_n \boldsymbol{e_n} = \boldsymbol{\theta}$.

Замечание 1. Пусть система из двух элементов $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2} \in L$ линейно зависима и пусть $\lambda_1 \neq 0$. Тогда $\boldsymbol{e_1} = -\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \boldsymbol{e_2}$, т.е. элемент $\boldsymbol{e_1}$ можно получить из элемента $\boldsymbol{e_2}$ умножением на константу.

Замечание 2. Пусть система элементов $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, ..., \boldsymbol{e_n} \in L$ линейно зависима и пусть $\lambda_1 \neq 0$. Тогда $\boldsymbol{e_1} = -\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \boldsymbol{e_2} - \dfrac{\lambda_3}{\lambda_1} \cdot \boldsymbol{e_3} - ... - \dfrac{\lambda_n}{\lambda_1} \cdot \boldsymbol{e_n}$, т.е. элемент $\boldsymbol{e_1}$ является линейной комбинацией остальных элементов. Таким образом, элемент $\boldsymbol{e_1}$ может быть получен из остальных элементов, т.е. он не является “уникальным”.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. Для того, чтобы система элементов $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, ..., \boldsymbol{e_n} \in L$ была линейно зависимой, необходимо и достаточно, чтобы один из элементов этой системы являлся линейной комбинацией остальных элементов.

Определение. Система элементов $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, ..., \boldsymbol{e_n} \in L$ называется ***линейно независимой***, если только тривиальная линейная комбинация этих элементов равна нулевому элементу, т.е. $\lambda_1 \boldsymbol{e_1} + \lambda_2 \boldsymbol{e_2} + ... + \lambda_n \boldsymbol{e_n} = \boldsymbol{\theta} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$.

Замечание 1. Если система элементов $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, ..., \boldsymbol{e_n} \in L$ линейно независима, то все элементы являются “уникальными”, т.к. никакой элемент нельзя получить из остальных.

Замечание 2. Опуская слово “система”, часто говорят: элементы (векторы) $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, ..., \boldsymbol{e_n} \in L$ линейно зависимы или линейно независимы.

Примеры.

1. В линейных пространствах V_2 и V_3 всех свободных векторов на плоскости и в пространстве два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны; три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны; любые четыре вектора линейно зависимы. Эти утверждения были доказаны в курсе аналитической геометрии.

2. В арифметическом линейном пространстве R^n векторы $\boldsymbol{e}_1 = (1,0,...,0,0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0,1,...,0,0), \ldots, \boldsymbol{e}_n = (0,0,...,0,1)$ линейно независимы. Действительно, линейная комбинация векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n \in R^n$ является вектором $\lambda_1 \boldsymbol{e}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{e}_2 + ... + \lambda_n \boldsymbol{e}_n = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$, который равен нулевому вектору $\boldsymbol{\theta} = (0,0,...,0)$ тогда и только тогда, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$.

3. В линейном пространстве $M_{m \times n}$ всех матриц размера $m \times n$ матричные единицы E_{ij}, $i = 1,...,m$, $j = 1,...,n$, линейно независимы. Матричной единицей E_{ij} размера $m \times n$ называется матрица, у которой

элемент, стоящий в i-й строке и j-м столбце, равен 1, а все остальные элементы равны нулю. Матричные единицы E_{ij}, $i=1,...,m$, $j=1,...,n$, линейно независимы, т.к. линейная комбинация этих матриц $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}E_{ij}$ представляет собой матрицу $A=\begin{pmatrix} \lambda_{11} & ... & \lambda_{1n} \\ ... & ... & ... \\ \lambda_{m1} & ... & \lambda_{mn} \end{pmatrix}$, которая равна нулевой матрице тогда и только тогда, когда $\lambda_{ij}=0$ для всех $i=1,...,m$ и $j=1,...,n$.

4. В линейном пространстве P_n всех алгебраических многочленов степени, не превышающей n, многочлены $p_0(x)=1$, $p_1(x)=x$, $p_2(x)=x^2,\ldots,$ $p_n(x)=x^n$ линейно независимы. Чтобы это доказать, рассмотрим линейную комбинацию этих многочленов $\lambda_1\cdot 1+\lambda_2\cdot x+...+\lambda_{n+1}\cdot x^n$. Если не все коэффициенты λ_i, $i=1,2,...,n+1$, равны нулю, то линейная комбинация является многочленом степени, не превышающей n. Этот многочлен может иметь не более, чем n корней и, следовательно, не может тождественно равняться нулю $\forall x\in(-\infty,+\infty)$. Таким образом, $\lambda_1\cdot 1+\lambda_2\cdot x+...+\lambda_{n+1}\cdot x^n\equiv 0\ \ \forall x\in(-\infty,+\infty)\ \Leftrightarrow$ $\lambda_1=\lambda_2=...=\lambda_{n+1}=0$, т.е. $p_0(x)$, $p_1(x),\ldots,$ $p_n(x)$ линейно независимы.

Задача 1. В линейном пространстве $C(R)$ всех функций, непрерывных на R, исследовать систему функций $f_1(x)=\cos^2 x$, $f_2(x)=\cos 2x$, $f_3(x)=1$ на линейную зависимость.

Решение. Из тригонометрического тождества $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ следует, что функция $f_2(x)$ является линейной комбинацией двух других функций $f_1(x)$ и $f_3(x)$: $f_2(x)=2f_1(x)-f_3(x)$. Следовательно, система функций линейно зависима.

Задача 2. В линейном пространстве $C(R)$ исследовать систему функций $f_1(x)=\sin x$, $f_2(x)=\sin 2x$, $f_3(x)=\sin 3x$ на линейную зависимость.

Решение. Рассмотрим тождество: $\alpha\sin x+\beta\sin 2x+\gamma\sin 3x\equiv 0\quad\forall x\in R$. Равенство имеет место при всех значениях x, следовательно, оно верно и при $x=\pi/4$, $x=\pi/3$, $x=\pi/2$. Подставив в равенство $x=\pi/4$, $x=\pi/3$, $x=\pi/2$, получим СЛАУ $\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}\alpha+\beta+\frac{\sqrt{2}}{2}\gamma=0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\beta=0 \\ \alpha-\gamma=0 \end{cases}$. Эта система имеет единственное решение $\alpha=\beta=\gamma=0$, следовательно, только тривиальная линейная комбинация функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ тождественно равна нулю и, следовательно, система функций линейно независима.

Задача 3. Доказать, что система функций $f_1(x)=\sin x$, $f_2(x)=\sin 2x,\ldots,f_n(x)=\sin nx$ линейно независима для любого натурального числа n.

Решение. Применим метод математической индукции. При $n=1$ система, состоящая из одной функции $f_1(x)=\sin x$, линейно независима, так как эта функция ненулевая. Далее предположим, что система функций линейно независима при $n=k$, т.е. система функций $f_1(x)=\sin x$, $f_2(x)=\sin 2x,\ldots,f_k(x)=\sin kx$ линейно независима. Докажем линейную независимость системы функций при $n=k+1$, т.е. линейную независимость системы функций $f_1(x)=\sin x,...,f_{k+1}(x)=\sin(k+1)x$. Рассмотрим тождество:

$$\alpha_1\sin x+\alpha_2\sin 2x+...+\alpha_k\sin kx+\alpha_{k+1}\sin(k+1)x\equiv 0 \quad \forall x\in R. \qquad (1)$$

Дважды продифференцируем тождество (1):

$$-\alpha_1\sin x-4\alpha_2\sin 2x-...-k^2\alpha_k\sin kx-(k+1)^2\alpha_{k+1}\sin(k+1)x\equiv 0\ \forall x\in R. \qquad (2)$$

Для того чтобы получить тождество, не содержащее функции $\sin(k+1)x$, умножим тождество (1) на $(k+1)^2$ и сложим его с тождеством (2): $\left((k+1)^2-1\right)\alpha_1\sin x+...+\left((k+1)^2-k^2\right)\alpha_k\sin kx\equiv 0 \quad \forall x\in R$. Поскольку по нашему предположению система функций $f_1(x)=\sin x,\ldots,f_k(x)=\sin kx$ линейно независима, из последнего тождества получим $\alpha_1=...=\alpha_k=0$. Подставляя $\alpha_1=...=\alpha_k=0$ в (1), получим $\alpha_{k+1}=0$. Следовательно, только тривиальная линейная комбинация функций $f_1(x),...,f_{k+1}(x)$ тождественно равна нулю, т.е. система функций $f_1(x),...,f_{k+1}(x)$ линейно независима.

Задача 4. Доказать, что если какой-либо вектор $\boldsymbol{y}$ линейного пространства L единственным образом представим в виде линейной комбинации векторов $\boldsymbol{x_1},...,\boldsymbol{x_k}$, то эта система векторов линейно независима.

Решение. Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{x_1},...,\boldsymbol{x_k}$: $\alpha_1\boldsymbol{x_1}+...+\alpha_k\boldsymbol{x_k}=\boldsymbol{\theta}$. Представим вектор $\boldsymbol{y}$ в виде линейной комбинации векторов $\boldsymbol{x_1},...,\boldsymbol{x_k}$: $\boldsymbol{y}=\beta_1\boldsymbol{x_1}+...+\beta_k\boldsymbol{x_k}$. Сложив два равенства, получим: $\boldsymbol{y}=(\alpha_1+\beta_1)\boldsymbol{x_1}+...+(\alpha_k+\beta_k)\boldsymbol{x_k}$. Поскольку вектор $\boldsymbol{y}$ может быть разложен по векторам $\boldsymbol{x_1},...,\boldsymbol{x_k}$ единственным образом, $\beta_1=\alpha_1+\beta_1,\ldots,\beta_k=\alpha_k+\beta_k$ и, следовательно, $\alpha_1=...=\alpha_k=0$, т. е. только тривиальная линейная комбинация векторов $\boldsymbol{x_1},...,\boldsymbol{x_k}$ равна нулевому вектору. Следовательно, система векторов $\boldsymbol{x_1},...,\boldsymbol{x_k}$ линейно независима.

1.3. Базис и размерность линейного пространства

Определение. ***Упорядоченная линейно независимая*** система элементов $\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},...,\boldsymbol{e_n}\in L$ называется ***базисом*** линейного пространства L, если любой элемент пространства L может быть представлен в виде линейной комбинации элементов этой системы, т.е. для любого элемента $\boldsymbol{x} \in L$ существуют такие действительные числа $x_1, x_2, ..., x_n$, что $\boldsymbol{x} = x_1 \boldsymbol{e_1} + x_2 \boldsymbol{e_2} + ... + x_n \boldsymbol{e_n}$. Последнее равенство называется ***разложением элемента x по базису*** $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, ..., \boldsymbol{e_n}$, а числа $x_1, x_2, ..., x_n$ называются ***координатами элемента x в базисе*** $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, ..., \boldsymbol{e_n}$. Элемент $\boldsymbol{x}$ в данном базисе можно записать с помощью координат следующим образом: $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Система элементов $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, ..., \boldsymbol{e_n}$ линейного пространства является его базисом тогда и только тогда, когда она образует максимальную линейно независимую систему элементов этого пространства.

Теорема 2. Каждый элемент линейного пространства может быть разложен по базису единственным способом.

Теорема 3. При сложении любых двух элементов линейного пространства их координаты в одном базисе складываются; при умножении элемента линейного пространства на произвольное действительное число λ все координаты этого элемента умножаются на λ, т.е. если в некотором базисе $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, ..., y_\mathrm{n})$, то в этом базисе $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$, $\lambda \cdot \boldsymbol{x} = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n)$.

Чтобы доказать, что система элементов $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, ..., \boldsymbol{e_n}$ образует базис в линейном пространстве, надо доказать, что а) эти элементы линейно независимые, б) любой элемент этого пространства может быть разложен по элементам $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, ..., \boldsymbol{e_n}$.

Примеры.

1. В курсе аналитической геометрии было доказано, что в линейном пространстве V_2 любая пара неколлинеарных векторов образует базис, в пространстве V_3 любая тройка некомпланарных векторов образует базис.

2. В арифметическом линейном пространстве R^n векторы $\boldsymbol{e_1} = (1,0,...,0,0)$, $\boldsymbol{e_2} = (0,1,...,0,0)$, …, $\boldsymbol{e_n} = (0,0,...,0,1)$ образуют базис, т.к. они линейно независимы и любой вектор $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n)$ пространства R^n можно представить в виде $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n) = x_1 \boldsymbol{e_1} + x_2 \boldsymbol{e_2} + ... + x_n \boldsymbol{e_n}$, т.е. любой вектор разложим по векторам $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, ..., \boldsymbol{e_n}$. **Замечание.** Базис $\boldsymbol{e_1} = (1,0,...,0,0)$, $\boldsymbol{e_2} = (0,1,...,0,0)$, …, $\boldsymbol{e_n} = (0,0,...,0,1)$ называется ***естественным базисом*** пространства R^n.

3. В линейном пространстве $M_{m \times n}$ всех матриц размера $m \times n$ матричные единицы $E_{11}, E_{12}, ..., E_{1n}, E_{21}, ..., E_{2n}, ..., E_{mn}$ образуют базис, т.к. они линейно независимы, а любую матрицу $A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$ пространства

$M_{m\times n}$ можно представить в виде $A=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}E_{ij}$, т. е. A разложима по матричным единицам $E_{11},E_{12},...,E_{mn}$. **Замечание.** Базис $E_{11},E_{12},...,E_{mn}$ называется ***естественным базисом*** пространства $M_{m\times n}$.

4. В линейном пространстве P_n всех алгебраических многочленов степени, не превышающей n, многочлены $p_0(x)=1$, $p_1(x)=x$, $p_2(x)=x^2$, …, $p_n(x)=x^n$ образуют базис, т.к. они линейно независимы и любой многочлен пространства P_n имеет вид $f(x)=\lambda_1\cdot 1+\lambda_2\cdot x+...+\lambda_{n+1}\cdot x^n=$ $=\lambda_1\cdot p_0(x)+....+\lambda_{n+1}\cdot p_n(x)$, т.е. разложим по многочленам $p_0(x),...,p_n(x)$. **Замечание.** Базис $p_0(x),...,p_n(x)$ называется ***естественным базисом*** пространства P_n.

Замечание 1. Базис играет большую роль в изучении линейного пространства. С его помощью абстрактные векторы можно задавать в виде совокупности чисел (координат вектора в данном базисе), а операции над векторами можно сводить к операциям над числами (их координатами).

Замечание 2. Линейная зависимость (независимость) элементов линейного пространства эквивалентна линейной зависимости (независимости) столбцов координат этих элементов (в любом фиксированном базисе линейного пространства), так как выполнение каких-либо операций над векторами идентично выполнению тех же операций над их столбцами координат.

Определение. Линейное пространство L называется ***n-мерным***, если в нем существует n линейно независимых элементов, а любые $n+1$ элементов являются линейно зависимыми. При этом число n называется ***размерностью пространства*** L и обозначается $\dim L$.

Теорема 1. Если L – линейное пространство размерности n, то любые n линейно независимых элементов этого пространства образуют его базис.

Теорема 2. Если линейное пространство L имеет базис, состоящий из n элементов, то размерность L равна n.

Опираясь на теорему 2, можно утверждать, что $\dim R^n=n$, $\dim P_n=n+1$, $\dim M_{m\times n}=m\cdot n$.

Задача 1. Доказать, что система векторов $\boldsymbol{a_1}=(1,1,0)$, $\boldsymbol{a_2}=(1,-1,0)$, $\boldsymbol{a_3}=(-1,2,-1)$ является базисом в R^3.

<u>I способ (формальный).</u> а) Докажем, что система векторов $\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{a_3}$ линейно независима. Рассмотрим равенство $\lambda_1\cdot\boldsymbol{a_1}+\lambda_2\cdot\boldsymbol{a_2}+\lambda_3\cdot\boldsymbol{a_3}=\boldsymbol{\theta}$. Запишем его в координатной форме $\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3=0\\ \lambda_1-\lambda_2+2\lambda_3=0\\ -\lambda_3=0\end{cases}$. Полученная однородная СЛАУ

имеет единственное тривиальное решение $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ и, следовательно, система векторов $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}$ линейно независима.

б) Докажем, что любой вектор $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$ может быть разложен по векторам $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}$, т.е. существуют такие вещественные числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, что $\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{a_1} + \lambda_2 \boldsymbol{a_2} + \lambda_3 \boldsymbol{a_3}$. Запишем последнее равенство в координатной форме $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = x_1 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = x_2 \\ -\lambda_3 = x_3 \end{cases}$. Полученная неоднородная СЛАУ с матрицей коэффициентов $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ($\det A \neq 0$) имеет единственное решение $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

<u>II способ.</u> а) Докажем, что система векторов $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}$ линейно независима. Из столбцов координат векторов $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}$ составим матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Поскольку $\det A \neq 0$, столбцы матрицы A линейно независимы, поэтому и система векторов $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}$ линейно независима.

б) Поскольку количество линейно независимых векторов совпадает с размерностью пространства R^3, эти векторы образуют базис в пространстве R^3.

Задача 2. Доказать, что система многочленов $f_1(t) = t^3 + t^2 + t + 1$, $f_2(t) = t^2 + t + 1$, $f_3(t) = t + 1$, $f_4(t) = 1$ в пространстве P_3 линейно независима.

<u>I способ (формальный).</u> Рассмотрим линейную комбинацию многочленов $\lambda_1 \cdot f_1(t) + \lambda_2 \cdot f_2(t) + \lambda_3 \cdot f_3(t) + \lambda_4 \cdot f_4(t) \equiv 0 \quad \forall t \in (-\infty, +\infty)$. Подставив многочлены в тождество и приведя подобные члены, получим

$$\lambda_1 \cdot (t^3 + t^2 + t + 1) + \lambda_2 \cdot (t^2 + t + 1) + \lambda_3 \cdot (t + 1) + \lambda_4 \cdot 1 \equiv 0 \quad \forall t \in (-\infty, +\infty) \quad \Leftrightarrow$$

$$t^3 \cdot \lambda_1 + t^2 \cdot (\lambda_1 + \lambda_2) + t \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) \equiv 0 \quad \forall t \in (-\infty, +\infty).$$

Поскольку система многочленов $1, t, t^2, t^3$ линейно независима, только тривиальная линейная комбинация этих многочленов может быть тождественно равна нулю. Приравнивая коэффициенты при $t^3, t^2, t, 1$ к нулю, получим систему

$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \end{cases}$. Полученная СЛАУ имеет только тривиальное решение $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$, т.е. система многочленов $f_1(t), f_2(t), f_3(t), f_4(t)$ линейно независима.

<u>II способ.</u> Найдем координаты многочленов в базисе $1, t, t^2, t^3$ пространства P_3: $f_1(t) = t^3 + t^2 + t + 1 = (1,1,1,1)$, $f_2(t) = t^2 + t + 1 = (1,1,1,0)$, $f_3(t) = t + 1 = (1,1,0,0)$, $f_4(t) = 1 = (1,0,0,0)$. Из столбцов координат многочленов составим матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Поскольку $\det A \neq 0$, столбцы матрицы A линейно независимы, поэтому и система многочленов линейно независима.

Задача 3. Доказать, что для любой матрицы A размера $n \times n$ существует ненулевой многочлен $p(x)$ такой, что $p(A) = O$, где O – нулевая матрица размера $n \times n$.

<u>Решение.</u> Поскольку размерность пространства квадратных матриц $M_{n\times n}$ равна n^2, любая система из $n^2 + 1$ матриц линейно зависима. В частности, линейно зависима система матриц $\{E, A, A^2, ..., A^{n^2}\}$. Следовательно, существует нетривиальная линейная комбинация этих матриц, равная нулевой матрице: $\lambda_0 E + \lambda_1 A + \lambda_2 A^2 + ... + \lambda_{n^2} A^{n^2} = O$. Таким образом, искомый многочлен имеет вид: $p(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + ... + \lambda_{n^2} x^{n^2}$.

1.4. Матрица перехода от старого базиса к новому базису. Преобразование координат вектора при переходе к новому базису

Далее будем пользоваться матричными обозначениями. Базис $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, ..., \boldsymbol{e_n}$ удобно обозначать матрицей-строкой $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, ..., \boldsymbol{e_n})$; координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, ..., \boldsymbol{e_n}$ удобно обозначать матрицей – столбцом $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. В данных обозначениях разложение $\boldsymbol{x}$ по базису $\boldsymbol{e}$: $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e_1} + x_2\boldsymbol{e_2} + ... + x_n\boldsymbol{e_n}$ может быть записано в матричной форме $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e} \cdot X$.

Пусть $\boldsymbol{e}=(\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},...,\boldsymbol{e_n})$ и $\boldsymbol{f}=(\boldsymbol{f_1},\boldsymbol{f_2},...,\boldsymbol{f_n})$ – два базиса n-мерного линейного пространства L. Разложим векторы второго базиса $\boldsymbol{f}$ по базису $\boldsymbol{e}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}_1 &= \alpha_{11}\boldsymbol{e_1}+\alpha_{21}\boldsymbol{e_2}+...+\alpha_{n1}\boldsymbol{e_n}, \\ \boldsymbol{f}_2 &= \alpha_{12}\boldsymbol{e_1}+\alpha_{22}\boldsymbol{e_2}+...+\alpha_{n2}\boldsymbol{e_n}, \\ &\cdots \\ \boldsymbol{f}_n &= \alpha_{1n}\boldsymbol{e_1}+\alpha_{2n}\boldsymbol{e_2}+...+\alpha_{nn}\boldsymbol{e_n}. \end{aligned} \tag{1}$$

Коэффициенты α_{ij} этих разложений образуют матрицу $T_{e\to f}=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn}\end{pmatrix}$, которая называется ***матрицей перехода от базиса e к базису f***. Отметим, что i-й столбец матрицы перехода, $i=1,2,...,n$, является столбцом координат вектора $\boldsymbol{f_i}$ (i-го вектора нового базиса) относительно старого базиса $\boldsymbol{e}$, т.е. ***матрица перехода состоит из координат векторов нового базиса в старом, записанных по столбцам.***

Свойства матрицы перехода.

1. Соотношения (1) можно записать компактно в матричном виде

$$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{e}\cdot T_{e\to f}. \tag{2}$$

2. Матрица перехода квадратная и невырожденная и, следовательно, всегда имеет обратную.

Действительно, $\det T_{e\to f}\neq 0$, т.к. векторы $\boldsymbol{f_1},\boldsymbol{f_2},...,\boldsymbol{f_n}$ линейно независимы.

3. Если T – матрица перехода от базиса $\boldsymbol{e}$ к базису $\boldsymbol{f}$, то обратная матрица T^{-1} является матрицей перехода от базиса $\boldsymbol{f}$ к базису $\boldsymbol{e}$. Действительно, учитывая соотношение (2), получим $\boldsymbol{e}=\boldsymbol{f}\cdot T_{f\to e}=\boldsymbol{f}\cdot T^{-1}_{e\to f}$.

4. $T_{e\to g}=T_{e\to f}\cdot T_{f\to g}$.

Действительно, т.к. $\boldsymbol{g}=\boldsymbol{e}\cdot T_{e\to g}$, $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{e}\cdot T_{e\to f}$, $\boldsymbol{g}=\boldsymbol{f}\cdot T_{f\to g}$, следовательно, $\boldsymbol{g}=\boldsymbol{e}\cdot T_{e\to g}=\boldsymbol{f}\cdot T_{f\to g}=\boldsymbol{e}\cdot T_{e\to f}\cdot T_{f\to g}$. Таким образом, $T_{e\to g}=T_{e\to f}\cdot T_{f\to g}$.

Теорема. Пусть X_e матрица-столбец координат вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{e}$, X_f матрица-столбец координат вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{f}$, $T_{e\to f}$ – матрица перехода от базиса $\boldsymbol{e}$ к базису $\boldsymbol{f}$. ***Координаты вектора x в базисах e и f связаны между собой соотношением***

$$X_e=T_{e\to f}\cdot X_f. \tag{3}$$

Задача 1. Найти матрицу перехода от базиса $\boldsymbol{e}=(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})$ к базису $\boldsymbol{f}=(\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\boldsymbol{f}_3)$ в пространстве V_3. $\boldsymbol{f_1}=\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{f_2}=\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{f_3}=\boldsymbol{i}$.

Решение. Найдем координаты векторов $\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}, \boldsymbol{f_3}$ в базисе $\boldsymbol{e}$: $\boldsymbol{f_1} = (0,1,0)$, $\boldsymbol{f_2} = (0,0,1)$, $\boldsymbol{f_3} = (1,0,0)$. Из столбцов координат векторов составим матрицу $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Данная матрица A и есть матрица перехода от базиса $\boldsymbol{e}$ к базису $\boldsymbol{f}$.

Задача 2. В пространстве V_3 заданы векторы $\boldsymbol{f_1} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{f_2} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{f_3} = -\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$. Доказать, что система векторов $\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}, \boldsymbol{f_3})$ образует базис в V_3 и написать матрицу перехода от базиса $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ к базису $\boldsymbol{f}$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ в базисе $\boldsymbol{f}$.

Решение. а) Найдем координаты векторов $\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}, \boldsymbol{f_3}$ в базисе $\boldsymbol{e}$: $\boldsymbol{f_1} = (1,1,0)$, $\boldsymbol{f_2} = (1,-1,0)$, $\boldsymbol{f_3} = (-1,2,-1)$. Из столбцов координат векторов составим матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Поскольку $\det A \neq 0$, система векторов $\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}, \boldsymbol{f_3}$ линейно независима. Эта система образует базис в пространстве V_3, т.к. количество векторов в системе совпадает с размерностью пространства V_3.

б) Матрица A и есть матрица перехода от базиса $\boldsymbol{e}$ в базис $\boldsymbol{f}$. (1,–2,2) – координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$, (x_1, x_2, x_3) – координаты $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}, \boldsymbol{f_3})$, т.е. $X_{\boldsymbol{e}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $X_{\boldsymbol{f}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Подставив матрицы $X_{\boldsymbol{e}}$, $X_{\boldsymbol{f}}$, A в формулу (3), получим СЛАУ, записанную в матричном виде: $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Решив эту систему методом Гаусса, получим $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{3}{2}$, $x_3 = -2$. Таким образом, вектор $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{f}$ имеет координаты $\boldsymbol{x} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -2\right)$.

Задача 3. Доказать, что система многочленов $f_1(t) = t^2 + 1$, $f_2(t) = -t^2 + 2t$, $f_3(t) = t^2 - t$ образует базис в пространстве P_2. Найти координаты многочлена $g(t) = -2t^2 + t - 1$ в этом базисе.

Решение. а) Найдем координаты заданных многочленов в естественном базисе $\boldsymbol{e} = (1, t, t^2)$ пространства P_2: $f_1(t) = t^2 + 1 = (1,0,1)$, $f_2(t) = -t^2 + 2t = (0,2,-1)$, $f_3(t) = t^2 - t = (0,-1,1)$. Из столбцов координат многочленов составим матрицу $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$. Линейная независимость многочленов эквивалентна линейной независимости столбцов матрицы A. Поскольку $\det A\neq 0$, столбцы матрицы A линейно независимы, следовательно, и система многочленов линейно независима. Поскольку количество линейно независимых многочленов совпадает с размерностью пространства P_2, эти многочлены образуют базис в пространстве P_2.

б) Матрица A является матрицей перехода от базиса $\boldsymbol{e}$ к базису $\boldsymbol{f}$. Многочлен $g(t)=-2t^2+t-1$ имеет координаты $(-1,1,-2)$ в естественном базисе $\boldsymbol{e}=(1,t,t^2)$ и координаты (x_1,x_2,x_3) в базисе $\boldsymbol{f}=(f_1(t),f_2(t),f_3(t))$, т.е. $G_{\boldsymbol{e}}=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$, $G_{\boldsymbol{f}}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$. Пользуясь формулой (3), получим систему $\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$. $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=-1$ – решение системы. Таким образом, многочлен $g(t)$ в базисе $\boldsymbol{f}$ имеет координаты $g(t)=\left(-1,0,-1\right)$.

Замечание. Координаты многочлена $g(t)=-2t^2+t-1$ в базисе $\boldsymbol{f}$ можно найти вторым способом. Разложим многочлен по базису $g(t)=\lambda_1\cdot f_1(t)+\lambda_2\cdot f_2(t)+\lambda_3\cdot f_3(t)\quad \forall t\in(-\infty,+\infty)$. Подставив в равенство многочлены $f_1(t),\ f_2(t),\ f_3(t)$ и приведя подобные члены, получим

$$-2t^2+t-1=\lambda_1\cdot(t^2+1)+\lambda_2\cdot(-t^2+2t)+\lambda_3\cdot(t^2-t)\qquad \forall t\in(-\infty,+\infty)\qquad\Leftrightarrow$$

$$t^2\cdot(-2-\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)+t\cdot(1-2\lambda_2+\lambda_3)+(-1-\lambda_1)\equiv 0\qquad \forall t\in(-\infty,+\infty).$$

Поскольку система многочленов $1,t,t^2$ линейно независима, только тривиальная линейная комбинация этих многочленов может быть тождественно равна нулю. Приравнивая коэффициенты при $t^2,t,1$ к нулю, получим СЛАУ $\begin{cases}-2-\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3=0\\1-2\lambda_2+\lambda_3=0\\-1-\lambda_1=0\end{cases}$. $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=0$, $\lambda_3=-1$ – решение системы. Следовательно, $g(t)=\left(-1,0,-1\right)$ в базисе $\boldsymbol{f}$.

Задача 4. Два базиса $\boldsymbol{f}=(\boldsymbol{f_1},\boldsymbol{f_2},\boldsymbol{f_3})$ и $\boldsymbol{g}=(\boldsymbol{g_1},\boldsymbol{g_2},\boldsymbol{g_3})$ в R^3 заданы своими координатами в некотором третьем базисе $\boldsymbol{e}$ в R^3. $\boldsymbol{f_1}=(1,1,0)$, $\boldsymbol{f_2}=(1,0,1)$, $\boldsymbol{f_3}=(0,1,1)$, $\boldsymbol{g_1}=(1,1,1)$, $\boldsymbol{g_2}=(1,2,0)$, $\boldsymbol{g_3}=(-1,0,0)$. Вектор $\boldsymbol{x}$ задан координатами в базисе $\boldsymbol{g}$: $x = (\frac{3}{2}, -2, 3)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{f}$.

I способ. $T_{e \to f} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица перехода от $\boldsymbol{e}$ к $\boldsymbol{f}$. Для того чтобы найти матрицу перехода от $\boldsymbol{f}$ к $\boldsymbol{g}$, надо найти координаты векторов базиса $\boldsymbol{g}$ в базисе $\boldsymbol{f}$. Найдем координаты $\boldsymbol{g_1}$ в базисе $\boldsymbol{f}$. Вектор $\boldsymbol{g_1}$ имеет координаты $(1,1,1)$ в базисе $\boldsymbol{e}$ и координаты (x_1, x_2, x_3) в базисе $\boldsymbol{f}$, т.е. $G_{1_e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $G_{1_f} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Воспользовавшись формулой (3) $G_{1_e} = T_{e \to f} \cdot G_{1_f}$, получим СЛАУ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1}{2}$ – решение системы. Таким образом, вектор $\boldsymbol{g_1}$ в базисе $\boldsymbol{f}$ имеет координаты $\boldsymbol{g_1} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Аналогично найдем координаты $\boldsymbol{g_2}$ в базисе $\boldsymbol{f}$, решив систему $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ и координаты $\boldsymbol{g_3}$ в базисе $\boldsymbol{f}$, решив систему $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Вектор $\boldsymbol{g_2}$ в базисе $\boldsymbol{f}$ имеет координаты $\boldsymbol{g_2} = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, вектор $\boldsymbol{g_3}$ в базисе $\boldsymbol{f}$ имеет координаты $\boldsymbol{g_3} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Матрица перехода от $\boldsymbol{f}$ к $\boldsymbol{g}$ имеет вид: $T_{f \to g} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Чтобы найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{f}$, опять воспользуемся формулой (3): $X_f = T_{f \to g} \cdot X_g = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{15}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}$. Таким образом, вектор $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{f}$ имеет координаты $\boldsymbol{x} = \left(-\frac{15}{4}, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right)$.

II способ. $T_{e\to f}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$ – матрица перехода от $\boldsymbol{e}$ к $\boldsymbol{f}$,

$T_{e\to g}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&2&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ – матрица перехода от $\boldsymbol{e}$ к $\boldsymbol{g}$. Чтобы найти матрицу перехода от $\boldsymbol{f}$ к $\boldsymbol{g}$, воспользуемся формулой $T_{e\to g}=T_{e\to f}\cdot T_{f\to g}$. Из этой формулы получим: $T_{f\to g}=T_{e\to f}^{-1}\cdot T_{e\to g}$. Найдем матрицы $T_{e\to f}^{-1}$ и $T_{f\to g}$.

$$T_{e\to f}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

$$T_{f\to g}=T_{e\to f}^{-1}\cdot T_{e\to g}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&2&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Чтобы найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{f}$, воспользуемся формулой (3). $X_f=T_{f\to g}\cdot X_g=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{15}{4}\\\frac{1}{4}\\\frac{5}{4}\end{pmatrix}$. Таким образом, вектор $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{f}$ имеет координаты $\boldsymbol{x}=\left(-\frac{15}{4},\frac{1}{4},\frac{5}{4}\right)$.

1.5. Линейное подпространство

Определение. Непустое подмножество L_1 линейного пространства L называется ***линейным подпространством пространства*** L, если выполнены следующие два требования.

1. Сумма $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ любых двух элементов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ подмножества L_1 принадлежит подмножеству L_1, т.е. $\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in L_1 \Rightarrow \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in L_1$.

2. Произведение $\lambda\boldsymbol{x}$ любого элемента $\boldsymbol{x}$ подмножества L_1 на любое действительное число λ принадлежит подмножеству L_1, т.е. $\forall \boldsymbol{x}\in L_1$ и $\forall\lambda\in R \Rightarrow \lambda\boldsymbol{x}\in L_1$.

Утверждение. Подмножество L_1, удовлетворяющее перечисленным двум требованиям, само является линейным пространством относительно операций сложения элементов и умножения на действительное число, действующих в L.

Примеры.

1. В любом линейном пространстве L всегда имеются два линейных подпространства: само линейное пространство L и ***нулевое подпространство***, состоящее из одного нулевого элемента $\boldsymbol{\theta}$. Эти подпространства называются ***несобственными***. Все остальные линейные подпространства называются ***собственными***.

2. Множество всех свободных векторов, параллельных данной плоскости, образуют линейное подпространство пространства V_3 всех свободных векторов трехмерного пространства.

3. Множество P_n всех алгебраических многочленов переменной x и степени, не превышающей n, образуют линейное подпространство пространства $C[a,b]$ всех функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$.

Определение. Пусть $\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},...,\boldsymbol{e_k}$ – совокупность элементов линейного пространства L. ***Линейной оболочкой элементов*** $\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},...,\boldsymbol{e_k}$ называется совокупность всех линейных комбинаций этих элементов, т.е. множество вида $\{x_1\boldsymbol{e_1}+x_2\boldsymbol{e_2}+...+x_k\boldsymbol{e_k} \mid x_i \in R,\ i=1,2,...,k\}$. При этом говорят, что ***линейная оболочка натянута на векторы*** $\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},...,\boldsymbol{e_k}$. Договоримся обозначать линейную оболочку элементов $\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},...,\boldsymbol{e_k}$ символом $L(\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},...,\boldsymbol{e_k})$.

Справедливы следующие утверждения.

Утверждение 1. Если $\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},...,\boldsymbol{e_k}$ – элементы линейного пространства L, то линейная оболочка $L(\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},...,\boldsymbol{e_k})$ является линейным подпространством пространства L.

Утверждение 2. Линейная оболочка элементов $\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},...,\boldsymbol{e_k}$ является наименьшим подпространством, содержащим эти элементы.

Утверждение 3. Любое линейное пространство является линейной оболочкой любого из своих базисов.

Теорема. Размерность линейной оболочки $L(\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},...,\boldsymbol{e_k})$ равна максимальному числу линейно независимых элементов в системе элементов $\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},...,\boldsymbol{e_k}$. Если элементы $\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},...,\boldsymbol{e_k}$ линейно независимы, то размерность линейной оболочки $L(\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},...,\boldsymbol{e_k})$ равна k, а сами элементы $\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},...,\boldsymbol{e_k}$ образуют базис линейной оболочки.

Задача 1. Проверить, является ли подмножество $\boldsymbol{L}_1=\left\{ \{a_n\}\in R^\infty :\ a_n \ge 0 \quad \forall n \in N \right\}$ линейного пространства последовательностей $L=R^\infty$ подпространством.

Решение. Данное подмножество не является подпространством, так как при умножении его элемента на отрицательное число получится последовательность $\{b_n\}:\ b_n \le 0 \quad \forall n \in N$, т. е. последовательность, которая не принадлежит L_1.

Задача 2. Проверить, является ли подмножество $L_1 = \left\{ f(x) \in C[a,b] : \int\limits_a^b f(x)dx = 0 \right\}$ линейного пространства $L = C[a,b]$ подпространством.

Решение. Данное подмножество является подпространством. Действительно, рассмотрим произвольные два элемента $f(x)$ и $g(x)$ подмножества L_1. Сумма $f(x)+g(x)$ принадлежит подмножеству L_1, так как $\int\limits_a^b (f(x)+g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx = 0$. Произведение $\lambda f(x)$ $\forall \lambda \in R$ принадлежит L_1, так как $\int\limits_a^b (\lambda f(x))dx = \lambda \int\limits_a^b f(x)dx = 0$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. В линейном пространстве L исследовать систему векторов на линейную зависимость.

1) $L = R^3$, $\boldsymbol{a_1} = (1,5,2)$, $\boldsymbol{a_2} = (3,4,4)$, $\boldsymbol{a_3} = (1,2,1)$.

2) $L = R^4$, $\boldsymbol{a_1} = (-1,5,2,4)$, $\boldsymbol{a_2} = (3,3,3,5)$, $\boldsymbol{a_3} = (8,-4,2,2)$.

3) $L = R^5$, $\boldsymbol{a_1} = (2,-3,1,5,0)$, $\boldsymbol{a_2} = (3,1,-4,-9,4)$, $\boldsymbol{a_3} = (7,-5,-2,1,6)$.

4) $L = P_2$, $f_1(x) = 5x^2 - 14x + 1$, $f_2(x) = 3x^2 - 4x + 5$, $f_3(x) = 2x^2 + x + 7$.

5) $L = P_3$, $f_1(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 5$, $f_2(x) = 2x^3 + 5x^2 + x + 3$, $f_3(x) = 3x^3 + 8x^2 + 4x + 1$.

6) $L = C(R)$ – линейное пространство функций, непрерывных на R, $f_1(x) = \mathrm{e}^x$, $f_2(x) = \operatorname{sh} x$, $f_3(x) = \operatorname{ch} x$.

7) $L = C(R)$, $f_1(x) = \cos x$, $f_2(x) = \cos^3 x$, $f_3(x) = \cos 3x$.

8) $L = C(0,+\infty)$, $f_1(x) = \ln x$, $f_2(x) = \ln(x+1)$, $f_3(x) = \ln\left(\frac{1}{x} + 1\right)$.

9) $L = C(R)$, $f_1(x) = \mathrm{e}^x$, $f_2(x) = \mathrm{e}^{2x}$, $f_3(x) = \mathrm{e}^{3x}$.

10) $L = C(R)$, $f_1(x) = \cos x$, $f_2(x) = \cos 2x$, $f_3(x) = \cos 3x$

2. В линейном пространстве L найти координаты вектора $\boldsymbol{a}$ в данном базисе $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3})$.

1) $L = R^3$, $\boldsymbol{a} = (3,-2,7)$, $\boldsymbol{e_1} = (2,1,1)$, $\boldsymbol{e_2} = (1,2,5)$, $\boldsymbol{e_3} = (3,4,1)$.

2) $L = P_2$, $\boldsymbol{a} = a(x) = 4x^2 - 7x + 3$, $\boldsymbol{e_1} = e_1(x) = (x+2)^2$, $\boldsymbol{e_2} = e_2(x) = (x+2)$, $\boldsymbol{e_3} = e_3(x) = 1$.

3. Доказать, что любой ненулевой вектор $\boldsymbol{x}$ конечномерного линейного пространства может быть включен в какой-нибудь базис.

Указание. Рассмотрим произвольный базис линейного пространства L: $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, ..., \boldsymbol{e_n})$. Пусть $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e_1} + ... + x_n\boldsymbol{e_n}$, причем $x_i \neq 0$. Тогда в базис можно включить вектор $\boldsymbol{x}$ вместо $\boldsymbol{e_i}$. Осталось доказать, что полученная система векторов линейно независима.

4. Проверить, является ли подмножество L_1 линейного пространства L подпространством.

1) $L = V_3$, $L_1 = \{\boldsymbol{a} \in V_3 : \boldsymbol{a} \parallel \pi\}$, где π - заданная плоскость.

2) $L = V_3$, $L_1 = \{\boldsymbol{a} \in V_3 : |\boldsymbol{a}| = 1\}$.

3) $L = R^n$, $L_1 = \{\ \boldsymbol{a} = (a_1,...,a_n) \in R_n : a_1 + ... + a_n = 0\ \}$

4) $L = R^\infty$ – линейное пространство последовательностей, $L_1 = \left\{\ \{a_n\} \in R^\infty : \{a_n\}\ \textit{сходится}\right\}$.

5) $L = R^\infty$, $L_1 = \left\{\ \{a_n\} \in R^\infty : \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0\right\}$.

6) $L = R^\infty$, $L_1 = \left\{\{a_n\} \in R^\infty : \{a_n\}\ \textit{монотонно не убывает}\right\}$.

7) $L = R^\infty$, $L_1 = \left\{\ \{a_n\} \in R^\infty : \{a_n\}\ \textit{арифметическая прогрессия}\right\}$.

8) $L = R^\infty$, $L_1 = \left\{\ \{a_n\} \in R^\infty : \{a_n\}\ \textit{геометричская прогрессия}\right\}$.

9) $L = M_{n\times n}$, $L_1 = \{A \in M_{n\times n} : A\ \textit{верхнетреугольная матрица}\}$.

10) $L = M_{n\times n}$, $L_1 = \{A \in M_{n\times n} : A\ \textit{симметрическая матрица}\}$.

11) $L = M_{n\times n}$, $L_1 = \{A \in M_{n\times n} : A\ \textit{кососимметрическая матрица}\}$.

12) $L = M_{n\times n}$, $L_1 = \{A \in M_{n\times n} :\ \mathrm{detA} = 0\}$.

13) $L = M_{n\times n}$, $L_1 = \{A \in M_{n\times n} : a_{11} + ... + a_{nn} = 0\}$.

14) $L = P_n$, $L_1 = P_m$, где $m < n$.

15) $L = C[a,b]$, $L_1 = \{f(x) \in C[a,b] : f(a) = 0\}$.

16) $L = C[a,b]$, $L_1 = \{f(x) \in C[a,b] : f(a) = f(b)\}$.

17) $L = C[a,b]$, $L_1 = \{f(x) \in C[a,b] : f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b]\}$.

18) $L = C[a,b]$, $L_1 = \{f(x) \in C[a,b] : f(x)\,\textit{монотонно не убывает}\}$.

Глава II. Евклидово пространство

2.1. Определение и примеры евклидовых пространств

Определение. Вещественное линейное пространство E называется ***евклидовым пространством***, если выполнены следующие два требования.

1. Имеется правило, посредством которого любым двум элементам $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E$ ставится в соответствие вещественное число, называемое ***скалярным произведением*** этих элементов и обозначаемое символом $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

2. Указанное правило подчинено следующим четырем аксиомам:

1) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \quad \forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E$ (аксиома коммутативности);

2) $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \quad \forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in E$ (аксиома дистрибутивности);

3) $(\lambda \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \quad \forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E$, $\forall \lambda \in R$;

4) $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) \ge 0 \quad \forall\, \boldsymbol{x} \in E$; $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\theta}$.

Из аксиом 1) – 4) можно получить простейшие свойства скалярного произведения:

1) $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) \quad \forall\, \boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z} \in E$;

2) $(\boldsymbol{x},\lambda\,\boldsymbol{y}) = \lambda(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \quad \forall\, \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in E$, $\forall \lambda \in R$;

3) $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta}) = 0 \quad \forall\, \boldsymbol{x} \in E$.

Приведем **примеры** евклидовых пространств.

1. В линейных пространствах V_2 и V_3 всех свободных векторов на плоскости и в пространстве в курсе аналитической геометрии вводится скалярное произведение по следующему правилу: $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x}| \cdot |\boldsymbol{y}| \cdot \cos\varphi$, где φ – угол между векторами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, а $|\boldsymbol{x}|$ и $|\boldsymbol{y}|$ – их длины.

2. В арифметическом линейном пространстве R^n скалярное произведение можно задать по формуле: $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$.

3. В линейном пространстве $C[a,b]$ всех функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$, скалярное произведение можно задать по формуле: $\left(x(t),y(t)\right) = \int\limits_a^b x(t)y(t)\,dt$.

Замечание. В одном и том же линейном пространстве скалярное произведение можно задать различными способами.

Задача 1. Доказать, что в R^2 скалярное произведение можно определить следующим образом: $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 2x_1y_1 + 5x_2y_2$.

Решение. Проверим выполнение аксиом 1) – 4) для любых $\boldsymbol{x} = (x_1,x_2)$ и $\boldsymbol{y} = (y_1,y_2)$ из R^2.

1) $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 2x_1y_1 + 5x_2y_2 = 2y_1x_1 + 5y_2x_2 = (\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$.

2) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 2(x_1+y_1)z_1 + 5(x_2+y_2)z_2 = (2x_1z_1 + 5x_2z_2) + (2y_1z_1 + 5y_2z_2) =$
$= (\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$.

3) $(\lambda\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 2\lambda x_1y_1 + 5\lambda x_2y_2 = \lambda(2x_1y_1 + 5x_2y_2) = \lambda(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$.

4) $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = 2x_1x_1 + 5x_2x_2 = 2x_1^2 + 5x_2^2 \ge 0$;

$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = 2x_1^2 + 5x_2^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\theta}$.

Задача 2. Доказать, что в любом конечномерном линейном пространстве можно определить скалярное произведение.

Решение. Рассмотрим какой-нибудь базис этого пространства $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},\ldots,\boldsymbol{e_n})$. Тогда для любых векторов данного пространства $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e_1} + \ldots + x_n\boldsymbol{e_n}$ и $\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{e_1} + \ldots + y_n\boldsymbol{e_n}$ зададим скалярное произведение следующим образом: $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$. Справедливость всех четырех аксиом скалярного произведения для данной операции легко проверить.

Задача 3. Доказать, что в пространстве P_n формула $(f,g)=\sum_{i=1}^{m} f(x_i)g(x_i)$, где $x_1,...,x_m \in R$ – фиксированные различные числа, задает скалярное произведение тогда и только тогда, когда $m>n$.

Решение. Легко проверить справедливость аксиом 1), 2) и 3) скалярного произведения. Аксиома 4) имеет вид: $(f,f)=\sum_{i=1}^{m} f^2(x_i)\geq 0$, причем $(f,f)=\sum_{i=1}^{m} f^2(x_i)=0 \;\Leftrightarrow\; f(x)\equiv 0 \quad \forall x\in(-\infty,+\infty)$.

а) Если $m\leq n$, то в пространстве P_n существует ненулевой многочлен $f(x)=(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_m)$ степени m, для которого имеет место равенство $(f,f)=\sum_{i=1}^{m} f^2(x_i)=0$, что нарушает справедливость аксиомы 4).

б) Если $m>n$, то из соотношения $(f,f)=\sum_{i=1}^{m} f^2(x_i)=0$ следует, что $f(x)\equiv 0$, так как ненулевой многочлен степени, не превышающей n, не может иметь более чем n различных корней. Следовательно, в случае $m>n$ аксиома 4) справедлива, и поэтому формула $(f,g)=\sum_{i=1}^{m} f(x_i)g(x_i)$ задает скалярное произведение.

Теорема. Для любых двух элементов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ произвольного евклидова пространства справедливо ***неравенство Коши - Буняковского***:

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^2 \leq (\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\cdot(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}). \tag{1}$$

Запишем неравенство Коши-Буняковского в различных конкретных евклидовых пространствах.

1. В евклидовых пространствах V_2 и V_3 неравенство Коши - Буняковского имеет вид $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^2 \leq |\boldsymbol{x}|^2\cdot|\boldsymbol{y}|^2$.

2. В евклидовом арифметическом пространстве R^n: $(x_1y_1+...+x_ny_n)^2 \leq \left(x_1^2+...+x_n^2\right)\cdot\left(y_1^2+...+y_n^2\right)$.

3. В евклидовом пространстве $C[a,b]$ всех функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$: $\left(\int_a^b x(t)y(t)\,dt\right)^2 \leq \int_a^b x^2(t)\,dt\cdot\int_a^b y^2(t)\,dt$.

2.2. Определение и примеры нормированных пространств

Определение. Линейное пространство N называется ***нормированным***, если выполнены следующие два требования.

1. Имеется правило, посредством которого каждому элементу $\boldsymbol{x} \in N$ ставится в соответствие вещественное число, называемое ***нормой*** указанного элемента и обозначаемое символом $\|\boldsymbol{x}\|$.

2. Указанное правило подчинено следующим трем аксиомам:

1) $\|\boldsymbol{x}\| \ge 0 \quad \forall\, \boldsymbol{x} \in N$; $\|\boldsymbol{x}\| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\theta}$;

2) $\|\lambda \boldsymbol{x}\| = |\lambda| \cdot \|\boldsymbol{x}\| \quad \forall\, \boldsymbol{x} \in N,\ \forall \lambda \in R$;

3) $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \le \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\| \quad \forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in N$ (неравенство треугольника или неравенство Минковского).

Теорема. ***Всякое евклидово пространство является нормированным,*** если в нем норму любого элемента $\boldsymbol{x}$ определить равенством

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}.$$

Воспользовавшись формулой $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$, определим нормы в некоторых конкретных евклидовых пространствах. В пространствах V_2, V_3: $\|\boldsymbol{x}\| = |\boldsymbol{x}|$; в пространстве R^n: $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$; в пространстве $C[a,b]$: $\|x(t)\| = \sqrt{\int\limits_a^b x^2(t)\, dt}$.

Запишем неравенство треугольника в различных конкретных евклидовых пространствах. В пространствах V_2, V_3: $|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \le |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|$ (сторона треугольника не превосходит суммы двух других его сторон); в пространстве R^n: $\sqrt{(x_1 + y_1)^2 + ... + (x_n + y_n)^2} \le \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2} + \sqrt{y_1^2 + ... + y_n^2}$;

в пространстве $C[a,b]$: $\sqrt{\int\limits_a^b (x(t) + y(t))^2\, dt} \le \sqrt{\int\limits_a^b x^2(t)\, dt} + \sqrt{\int\limits_a^b y^2(t)\, dt}$.

Замечание. Если имеется ненулевой элемент $\boldsymbol{x} \in N$, то для построения элемента с нормой, равной единице, достаточно нормировать элемент $\boldsymbol{x}$, т.е. умножить этот элемент на число $\frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|}$. Норма полученного элемента $\boldsymbol{x_0} = \boldsymbol{x} \cdot \frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|}$ равна 1, т.к. $\|\boldsymbol{x_0}\| = \left\|\boldsymbol{x} \cdot \frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|}\right\| = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|} \cdot \|\boldsymbol{x}\| = 1$.

Задача 1. Вычислить скалярное произведение и нормы векторов $\boldsymbol{x} = (1,2,3,4)$ и $\boldsymbol{y} = (5,6,7,8)$ в R^4.

Решение. $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 8 = 70$, $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{30}$, $\|\boldsymbol{y}\| = \sqrt{5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2} = \sqrt{174}$.

Задача 2. Вычислить скалярное произведение и нормы функций $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2 + x$ в $C[0,1]$.

Решение. $\left(f(x),g(x)\right)=\int\limits_0^1 (x+1)\left(x^2+x\right)dx=\int\limits_0^1\left(x^3+2x^2+x\right)dx=\frac{17}{12}$,

$\|f(x)\|=\sqrt{\int\limits_0^1 (x+1)^2\,dx}=\sqrt{\frac{7}{3}}$, $\|g(x)\|=\sqrt{\int\limits_0^1\left(x^2+x\right)^2 dx}=\sqrt{\frac{31}{30}}$.

Задача 3. Нормировать вектор $\boldsymbol{x}=(1,2,3,4)$ в R^4.

Решение. $\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2}=\sqrt{30}$, $\boldsymbol{x_0}=\boldsymbol{x}\cdot\frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{30}},\frac{2}{\sqrt{30}},\frac{3}{\sqrt{30}},\frac{4}{\sqrt{30}}\right)$.

Замечание. Неравенство Коши-Буняковского можно записать в следующем виде:

$$|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|\le\|\boldsymbol{x}\|\cdot\|\boldsymbol{y}\|. \qquad (2)$$

Заметим далее, что в любом евклидовом пространстве можно ввести понятие угла между двумя произвольными элементами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ этого пространства. В полной аналогии с векторной алгеброй, назовем ***углом*** φ ***между элементами x и y*** произвольного евклидова пространства угол, косинус которого определяется соотношением $\cos\varphi=\frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|\cdot\|\boldsymbol{y}\|}=\frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\sqrt{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}\cdot\sqrt{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})}}$, $\varphi\in[0,\pi]$. Данное нами определение угла корректно, т.к. в силу неравенства Коши-Буняковского (2) дробь $\frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|\cdot\|\boldsymbol{y}\|}$ по модулю не превосходит единицы.

Задача. Найти угол между $f(x)=x^{\frac{1}{4}}$ и $g(x)=x^{\frac{3}{4}}$ в $C[0,1]$.

Решение. $\left(f(x),g(x)\right)=\int\limits_0^1 x^{\frac{1}{4}}x^{\frac{3}{4}}dx=\frac{1}{2}$, $\|f(x)\|=\sqrt{\int\limits_0^1 (x^{\frac{1}{4}})^2\,dx}=\sqrt{\frac{2}{3}}$,

$\|g(x)\|=\sqrt{\int\limits_0^1\left(x^{\frac{3}{4}}\right)^2 dx}=\sqrt{\frac{2}{5}}$, $\cos\varphi=\frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|\cdot\|\boldsymbol{y}\|}=\frac{\sqrt{15}}{4}$, $\varphi=\arccos\frac{\sqrt{15}}{4}$.

Определение. ***Два ненулевых элемента*** евклидова пространства $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in E$ называются ***ортогональными***, если их скалярное произведение равно нулю.

По аналогии с векторной алгеброй, назовем сумму $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ двух ***ортогональных*** элементов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ гипотенузой прямоугольного треугольника, построенного на катетах $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$.

Теорема Пифагора. В произвольном евклидовом пространстве квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Действительно, учитывая $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0$, $\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}$ и $\|\boldsymbol{y}\|=\sqrt{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})}$, получим $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})+2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})=\|\boldsymbol{x}\|^2+\|\boldsymbol{y}\|^2$.

2.3. Ортогональные и ортонормированные базисы конечномерного евклидова пространства. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта

Определение. Система ненулевых элементов $\boldsymbol{x_1},...,\boldsymbol{x_n}$ евклидова пространства называется ***ортогональной системой***, если любые два элемента этой системы ортогональны, т.е. $(\boldsymbol{x_i},\boldsymbol{x_j})=0$ при $i\neq j$, $i=1,2,...,n$, $j=1,2,...,n$.

Определение. Система ненулевых элементов $\boldsymbol{x_1},...,\boldsymbol{x_n}$ евклидова пространства называется ***ортонормированной системой***, если все элементы этой системы попарно ортогональны и норма каждого элемента равна единице, т.е. $(\boldsymbol{x_i},\boldsymbol{x_j})=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$, $i=1,2,...,n$, $j=1,2,...,n$.

Теорема. Любая ортогональная (ортонормированная) система ненулевых элементов линейно независима.

Следствие. В n-мерном евклидовом пространстве любая ортогональная (ортонормированная) система из n элементов образует базис.

Определение. Базис евклидова пространства $\boldsymbol{e_1},...,\boldsymbol{e_n}$ называется ***ортогональным базисом***, если его элементы образуют ортогональную систему, т.е. если $(\boldsymbol{e_i},\boldsymbol{e_j})=0$ при $i\neq j$, $i=1,2,...,n$, $j=1,2,...,n$.

Определение. Базис евклидова пространства $\boldsymbol{e_1},...,\boldsymbol{e_n}$ называется ***ортонормированным базисом***, если его элементы образуют ортонормированную систему, т.е. если $(\boldsymbol{e_i},\boldsymbol{e_j})=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$, $i=1,2,...,n$, $j=1,2,...,n$.

Примеры.

1. В пространстве V_2 векторы $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ образуют ортонормированный базис; в V_3 векторы $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ образуют ортонормированный базис.

2. В арифметическом линейном пространстве R^n векторы $\boldsymbol{e_1}=(1,0,...,0,0)$, $\boldsymbol{e_2}=(0,1,...,0,0)$, …, $\boldsymbol{e_n}=(0,0,...,0,1)$ образуют ортонормированный базис.

Теорема. В любом конечномерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

Процесс получения из произвольного базиса $\boldsymbol{f_1},\boldsymbol{f_2},...,\boldsymbol{f_k}$ линейной оболочки $L(\boldsymbol{f_1},\boldsymbol{f_2},...,\boldsymbol{f_k})$ ортонормированного базиса $\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},...,\boldsymbol{e_k}$ той же линейной оболочки называется ***процессом ортогонализации Грама–Шмидта***:

1) $\boldsymbol{g_1}=\boldsymbol{f_1}$, $\quad\boldsymbol{e_1}=\boldsymbol{g_1}/\|\boldsymbol{g_1}\|$;

2) $\boldsymbol{g_2}=\boldsymbol{f_2}-(\boldsymbol{f_2},\boldsymbol{e_1})\cdot\boldsymbol{e_1}$, $\quad\boldsymbol{e_2}=\boldsymbol{g_2}/\|\boldsymbol{g_2}\|$;

3) $\boldsymbol{g_3} = \boldsymbol{f_3} - (\boldsymbol{f_3}, \boldsymbol{e_1}) \cdot \boldsymbol{e_1} - (\boldsymbol{f_3}, \boldsymbol{e_2}) \cdot \boldsymbol{e_2}, \quad \boldsymbol{e_3} = \boldsymbol{g_3} / \|\boldsymbol{g_3}\|$;

…

k) $\boldsymbol{g_k} = \boldsymbol{f_k} - (\boldsymbol{f_k}, \boldsymbol{e_1}) \cdot \boldsymbol{e_1} - (\boldsymbol{f_k}, \boldsymbol{e_2}) \cdot \boldsymbol{e_2} - \ldots - (\boldsymbol{f_k}, \boldsymbol{e_{k-1}}) \cdot \boldsymbol{e_{k-1}}, \quad \boldsymbol{e_k} = \boldsymbol{g_k} / \|\boldsymbol{g_k}\|$.

Замечание. Если из произвольного базиса $\boldsymbol{f_1}, \ldots, \boldsymbol{f_k}$ линейной оболочки $L(\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}, \ldots, \boldsymbol{f_k})$ нужно получить ортогональный базис $\boldsymbol{e_1}, \ldots, \boldsymbol{e_k}$ той же линейной оболочки, то процесс ортогонализации можно провести следующим образом:

1) $\boldsymbol{e_1} = \boldsymbol{f_1}$;

2) $\boldsymbol{e_2} = \boldsymbol{f_2} - \dfrac{(\boldsymbol{f_2}, \boldsymbol{e_1})}{(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_1})} \cdot \boldsymbol{e_1}$;

3) $\boldsymbol{e_3} = \boldsymbol{f_3} - \dfrac{(\boldsymbol{f_3}, \boldsymbol{e_1})}{(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_1})} \cdot \boldsymbol{e_1} - \dfrac{(\boldsymbol{f_3}, \boldsymbol{e_2})}{(\boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_2})} \cdot \boldsymbol{e_2}$;

…

k) $\boldsymbol{e_k} = \boldsymbol{f_k} - \dfrac{(\boldsymbol{f_k}, \boldsymbol{e_1})}{(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_1})} \cdot \boldsymbol{e_1} - \dfrac{(\boldsymbol{f_k}, \boldsymbol{e_2})}{(\boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_2})} \cdot \boldsymbol{e_2} - \ldots - \dfrac{(\boldsymbol{f_k}, \boldsymbol{e_{k-1}})}{(\boldsymbol{e_{k-1}}, \boldsymbol{e_{k-1}})} \cdot \boldsymbol{e_{k-1}}$.

Задача 1. Применить процесс ортогонализации к $\boldsymbol{f_1} = (1,1,1,1)$, $\boldsymbol{f_2} = (3,3,-1,-1)$, $\boldsymbol{f_3} = (-2,0,6,8)$. $\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}, \boldsymbol{f_3} \in R^4$.

<u>Решение.</u> Убедимся, что вектора $\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}, \boldsymbol{f_3}$ линейно независимы. Из столбцов координат векторов $\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}, \boldsymbol{f_3}$ составим матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & 8 \end{pmatrix}$. Вычислим ранг матрицы A методом элементарных преобразований строк. Поскольку $r(A) = 3$ и матрица имеет ровно три столбца, столбцы матрицы A линейно независимы, поэтому и система векторов $\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}, \boldsymbol{f_3}$ линейно независима. Далее проведем процесс ортогонализации в три шага:

1) $\boldsymbol{e_1} = \boldsymbol{f_1} = (1,1,1,1)$;

2) $(\boldsymbol{f_2}, \boldsymbol{e_1}) = 3 + 3 - 1 - 1 = 4, \quad (\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_1}) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4, \quad \dfrac{(\boldsymbol{f_2}, \boldsymbol{e_1})}{(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_1})} = 1$,

$\boldsymbol{e_2} = \boldsymbol{f_2} - \dfrac{(\boldsymbol{f_2}, \boldsymbol{e_1})}{(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_1})} \cdot \boldsymbol{e_1} = (2,2,-2,-2)$;

3) $(\boldsymbol{f_3}, \boldsymbol{e_1}) = -2 + 0 + 6 + 8 = 12, \quad (\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_1}) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4, \quad \dfrac{(\boldsymbol{f_3}, \boldsymbol{e_1})}{(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_1})} = 3$,

$(\boldsymbol{f_3}, \boldsymbol{e_2}) = -4 - 12 - 16 = -32, \quad (\boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_2}) = 4 + 4 + 4 + 4 = 16, \quad \dfrac{(\boldsymbol{f_3}, \boldsymbol{e_2})}{(\boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_2})} = -2$,

$\boldsymbol{e_3} = \boldsymbol{f_3} - \dfrac{(\boldsymbol{f_3}, \boldsymbol{e_1})}{(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_1})} \cdot \boldsymbol{e_1} - \dfrac{(\boldsymbol{f_3}, \boldsymbol{e_2})}{(\boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_2})} \cdot \boldsymbol{e_2} = (-1,1,-1,1)$.

Таким образом, $\boldsymbol{e_1} = (1,1,1,1)$, $\boldsymbol{e_2} = (2,2,-2,-2)$, $\boldsymbol{e_3} = (-1,1,-1,1)$.

Задача 2. Проверить ортогональность векторов $\boldsymbol{e_1} = (1,-2,1,3)$ и $\boldsymbol{e_2} = (2,1,-3,1)$ в евклидовом пространстве R^4 и дополнить их до ортогонального базиса.

Решение. а) Поскольку $(\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2}) = 2-2-3+3=0$, векторы $\boldsymbol{e_1}$, $\boldsymbol{e_2}$ ортогональны в R^4. Найдем вектор $\boldsymbol{e_3}$ ортогональный векторам $\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2}$. Вектор $\boldsymbol{e_3} = (x_1,x_2,x_3,x_4)$ удовлетворяет условиям $\begin{cases}(\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_3}) = 0\\(\boldsymbol{e_2},\boldsymbol{e_3}) = 0\end{cases}$, т.е. его координаты являются решением системы $\begin{cases}x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0\\2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0\end{cases}$. Решив систему, получим $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ $\forall c_1, c_2$. Для определения вектора $\boldsymbol{e_3} = (x_1,x_2,x_3,x_4)$ достаточно найти любое нетривиальное решение системы, например $\boldsymbol{e_3} = (1,1,1,0)$ ($c_1 = 1,\ c_2 = 0$).

б) Найдем вектор $\boldsymbol{e_4}$ ортогональный векторам $\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},\boldsymbol{e_3}$. Вектор $\boldsymbol{e_4} = (x_1,x_2,x_3,x_4)$ удовлетворяет условиям $\begin{cases}(\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_4}) = 0\\(\boldsymbol{e_2},\boldsymbol{e_4}) = 0\\(\boldsymbol{e_3},\boldsymbol{e_4}) = 0\end{cases}$, т.е. его координаты являются решением системы $\begin{cases}x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0\\2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0\\x_1 + x_2 + x_3 = 0\end{cases}$. Решение системы имеет вид $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ $\forall c_1$. Для определения вектора $\boldsymbol{e_4} = (x_1,x_2,x_3,x_4)$ достаточно найти любое нетривиальное решение системы, например $\boldsymbol{e_4} = (-1,1,0,1)$ ($c_1 = 1$). Векторы $\boldsymbol{e_1} = (1,-2,1,3)$, $\boldsymbol{e_2} = (2,1,-3,1)$, $\boldsymbol{e_3} = (1,1,1,0)$, $\boldsymbol{e_4} = (-1,1,0,1)$ образуют искомый ортогональный базис в R^4.

Перечислим **свойства ортонормированного базиса**.

Пусть $\boldsymbol{e_1},...,\boldsymbol{e_n}$ – ортонормированный базис в произвольном n-мерном евклидовом пространстве E; $\boldsymbol{x} = (x_1,...,x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1,...,y_n)$ – два произвольных элемента этого пространства с заданными координатами в базисе $\boldsymbol{e_1},...,\boldsymbol{e_n}$, тогда справедливы следующие утверждения.

1. $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=x_1y_1+...+x_ny_n=\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i$, т.е. в ортонормированном базисе скалярное произведение любых двух элементов равно сумме произведений соответствующих координат этих элементов.

Действительно, $(\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y})=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{e_i},\sum\limits_{j=1}^{n}y_j\boldsymbol{e_j}\right)=\sum\limits_{i,j=1}^{n}x_iy_j(\boldsymbol{e_i},\boldsymbol{e_j})=\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i$, т.к. $(\boldsymbol{e_i},\boldsymbol{e_j})=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$.

2. $x_i=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{e_i})\quad \forall i=1,2,...,n$, т.е. координаты произвольного элемента в ортонормированном базисе равны скалярным произведениям этого элемента на соответствующие элементы базиса.

Замечание. В произвольном базисе $\boldsymbol{f_1},\boldsymbol{f_2},...,\boldsymbol{f_n}$ n-мерного евклидова пространства E скалярное произведение двух элементов определяется равенством $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum\limits_{i,j=1}^{n}x_iy_j(\boldsymbol{f_i},\boldsymbol{f_j})$ и $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\neq\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Проверить, задает ли формула $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=|\boldsymbol{x}|\cdot|\boldsymbol{y}|\cdot\sin\angle(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ скалярное произведение в пространстве V_3, где $\angle(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ – угол между векторами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$.
2. Доказать, что векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ удовлетворяют соотношению $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ для любого вектора $\boldsymbol{z}$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$.
3. В евклидовом пространстве R^5 найти угол между векторами $\boldsymbol{a}=(3,-5,1,5,-2)$ и $\boldsymbol{b}=(4,0,-4,4,1)$.
4. В евклидовом пространстве $C[0,1]$ найти угол между функциями $f(x)=\sqrt[3]{x}$ и $g(x)=x^4$.
5. В евклидовом пространстве найти косинус угла между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, если $\|\boldsymbol{a}\|=3$, $\|\boldsymbol{b}\|=1$ и $\|\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}\|^2+\|2\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}\|^2=60$.
6. В евклидовом пространстве найти $\|4\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|$, если $\|\boldsymbol{a}\|=2$, $\|\boldsymbol{b}\|=1$ и $\|\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}\|=4$.
7. В евклидовом пространстве $C[-l,l]$ заданы функции $f(x)$ и $g(x)$, $f(x)$– четная функция, $g(x)$ – нечетная. Доказать, что функция $f(x)$ ортогональна функции $g(x)$.
8. В евклидовом пространстве $C[0,\ln 2]$ найти $a\in R$, при котором функция $f(x)=e^{2x}$ ортогональна функции $g(x)=e^x+a$.
9. В евклидовом пространстве $C[0,\pi]$ найти $a\in R$, при котором функция $f(x)=3\sin x+2\cos x$ ортогональна функции $g(x)=\sin x+a\cos x$.

10. Доказать, что любую ортогональную систему ненулевых векторов евклидова пространства можно дополнить до ортогонального базиса этого пространства.
11. В евклидовом пространстве $C[-1,1]$ провести ортогонализацию системы элементов $\{1, x, x^2, x^3\}$.
12. Пусть $(\boldsymbol{e_1},...,\boldsymbol{e_n})$ – ортонормированный базис евклидова пространства, $\{\boldsymbol{f_1},...,\boldsymbol{f_k}\}$ – некоторая ортонормированная система векторов этого пространства, α_{ij} – угол между векторами $\boldsymbol{e_i}$ и $\boldsymbol{f_j}$. Доказать, что $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{k}\cos^2\alpha_{ij} = k$.

    Указание. Для любого $j = 1,...,k$ вектор $\boldsymbol{f_j}$ имеет координаты $(\cos\alpha_{1j},...,\cos\alpha_{nj})$ в данном базисе, следовательно, $\sum\limits_{i=1}^{n}\cos^2\alpha_{ij} = 1$.

Глава III. Линейные операторы

3.1. Определение и примеры линейных операторов. Матрица линейного оператора

Пусть задано отображение $\boldsymbol{A}: L_1 \to L_2$ из линейного пространства L_1 в линейное пространство L_2, сопоставляющее каждому элементу $\boldsymbol{x} \in L_1$ один элемент $\boldsymbol{Ax} \in L_2$, называемый образом элемента $\boldsymbol{x}$.

Определение. Отображение $\boldsymbol{A}: L_1 \to L_2$ из линейного пространства L_1 в линейное пространство L_2 называется ***линейным оператором***, если для любых элементов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L_1$ и для любого действительного числа $\lambda \in R$ выполняются соотношения:

1) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Ay}$ (образ суммы элементов равен сумме их образов);

2) $\boldsymbol{A}(\lambda \cdot \boldsymbol{x}) = \lambda \cdot \boldsymbol{Ax}$ (образ произведения элемента на число равен произведению образа элемента на число).

Из условий 1) – 2) вытекают следующие утверждения.

1. Линейный оператор сохраняет линейные комбинации, т.е. переводит линейную комбинацию элементов в линейную комбинацию их образов с теми же коэффициентами: $\boldsymbol{A}\left(\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i \boldsymbol{x_i}\right) = \sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i\, \boldsymbol{Ax_i}$ $\quad \forall \boldsymbol{x_i} \in L_1, \quad \forall \lambda_i \in R$, $i = 1,2....,k$.

2. Линейный оператор переводит нулевой элемент пространства L_1 в нулевой элемент пространства L_2: $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{L_1}}) = \boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{L_2}}$, где $\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{L_1}}, \boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{L_2}}$ нулевые элементы пространств L_1 и L_2 соответственно.

3. Линейный оператор сохраняет линейную зависимость (независимость), т.е. переводит линейно зависимую (независимую) систему элементов в линейно зависимую (независимую).

Пусть L_1 и L_2 – линейные пространства размерности n и m соответственно. Пусть $\boldsymbol{A}$ – линейный оператор, действующий из L_1 в L_2. Зафиксируем в пространстве L_1 базис $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, ..., \boldsymbol{e_n})$, а в пространстве L_2 базис $\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}, ..., \boldsymbol{f_m})$. Рассмотрим действие линейного оператора $\boldsymbol{A}$ на векторы базиса $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, ..., \boldsymbol{e_n})$. Разложим векторы $\boldsymbol{Ae_1}, \boldsymbol{Ae_2}, ..., \boldsymbol{Ae_n} \in L_2$ по базису $\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}, ..., \boldsymbol{f_m})$:

$$\boldsymbol{Ae_1} = \alpha_{11}\boldsymbol{f_1} + \alpha_{21}\boldsymbol{f_2} + ... + \alpha_{m1}\boldsymbol{f_m},$$
$$\boldsymbol{Ae_2} = \alpha_{12}\boldsymbol{f_1} + \alpha_{22}\boldsymbol{f_2} + ... + \alpha_{m2}\boldsymbol{f_m},$$
$$\cdots$$
$$\boldsymbol{Ae_n} = \alpha_{1n}\boldsymbol{f_1} + \alpha_{2n}\boldsymbol{f_2} + ... + \alpha_{mn}\boldsymbol{f_m}.$$

Коэффициенты α_{ij} этих разложений образуют матрицу $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$, которая называется ***матрицей линейного оператора $\boldsymbol{A}$ в паре базисов $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{f}$***. Отметим, что i-й столбец матрицы линейного оператора $\boldsymbol{A}$, $i = 1,2,...,n$, в паре базисов $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{f}$ является столбцом координат вектора $\boldsymbol{Ae_i}$ в базисе $\boldsymbol{f}$.

В дальнейшем будем рассматривать линейные операторы, действующие из линейного пространства L в то же самое линейное пространство L. Пусть размерность L равна n. Фиксируем в L базис $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, ..., \boldsymbol{e_n} \in L$. Рассмотрим действие линейного оператора $\boldsymbol{A}$ на векторы базиса $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, ..., \boldsymbol{e_n})$. Разложим векторы $\boldsymbol{Ae_1}, \boldsymbol{Ae_2}, ..., \boldsymbol{Ae_n} \in L$ по базису $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, ..., \boldsymbol{e_n})$:

$$\boldsymbol{Ae_1} = \alpha_{11}\boldsymbol{e_1} + \alpha_{21}\boldsymbol{e_2} + ... + \alpha_{n1}\boldsymbol{e_n},$$
$$\boldsymbol{Ae_2} = \alpha_{12}\boldsymbol{e_1} + \alpha_{22}\boldsymbol{e_2} + ... + \alpha_{n2}\boldsymbol{e_n},$$
$$\cdots$$
$$\boldsymbol{Ae_n} = \alpha_{1n}\boldsymbol{e_1} + \alpha_{2n}\boldsymbol{e_2} + ... + \alpha_{nn}\boldsymbol{e_n}.$$

Коэффициенты α_{ij} этих разложений образуют матрицу $A=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$, которая называется ***матрицей линейного оператора*** $\boldsymbol{A}$ ***в базисе*** $\boldsymbol{e}$. Отметим, что i-й столбец матрицы линейного оператора $\boldsymbol{A}$, $i=1,2,...,n$, в базисе $\boldsymbol{e}$ является столбцом координат вектора $\boldsymbol{Ae_i}$ в базисе $\boldsymbol{e}$.

Пример. Рассмотрим линейный оператор $\boldsymbol{A}:V_2 \to V_2$, осуществляющий поворот вектора на угол φ против часовой стрелки. Найдем матрицу линейного оператора $\boldsymbol{A}$ в базисе $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$.

Решение. Рассмотрим действие линейного оператора $\boldsymbol{A}$ на векторы базиса $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$. При повороте против часовой стрелки векторы $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ перейдут в векторы $\boldsymbol{i}',\boldsymbol{j}'$ соответственно. Разложим векторы $\boldsymbol{i}',\boldsymbol{j}'$ по базису $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$: $\boldsymbol{i}'=(\cos\varphi,\sin\varphi)$, $\boldsymbol{j}'=(-\sin\varphi,\cos\varphi)$ (см. рис. 1).

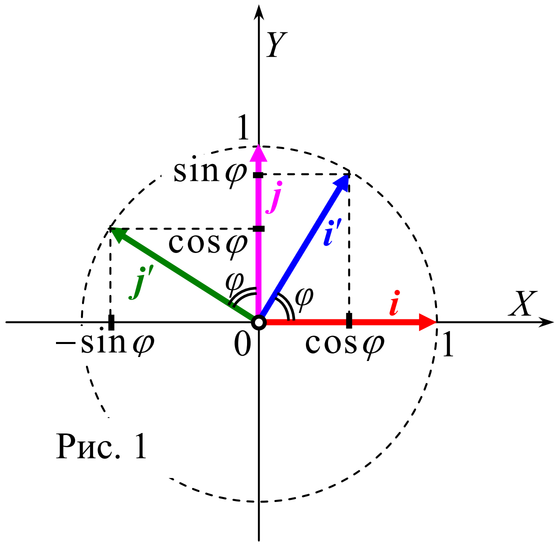

Рис. 1

Матрица линейного оператора $\boldsymbol{A}$ в базисе $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ имеет вид $A=\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

Теорема 1. Пусть $\boldsymbol{A}:L \to L$ линейный оператор, действующий из L в L. Пусть $\boldsymbol{e}=(\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},...,\boldsymbol{e_n})$ базис в L. Тогда ***вектор*** $\boldsymbol{Ax}$ ***в базисе*** $\boldsymbol{e}$ ***имеет координаты*** $A\cdot X$, где A – матрица линейного оператора $\boldsymbol{A}$ в базисе $\boldsymbol{e}$, X – матрица-столбец координат вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{e}$.

Теорема 2. Пусть $\boldsymbol{e}=(\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},...,\boldsymbol{e_n})$ базис в L, A – квадратная матрица размера $n\times n$. Тогда существует единственный линейный оператор $\boldsymbol{A}:L\to L$, матрицей которого в базисе $\boldsymbol{e}$ является матрица A.

Задача 1. Убедившись в линейности оператора $\boldsymbol{A}:V_3\to V_3$, найти его матрицу в базисе $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$. $\boldsymbol{Ax}=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{e})\cdot\boldsymbol{e}$, где $\boldsymbol{e}$ – заданный единичный вектор.

Решение. Линейность данного оператора вытекает из свойств скалярного произведения:

1) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{e})\cdot\boldsymbol{e}=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{e})\cdot\boldsymbol{e}+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{e})\cdot\boldsymbol{e}=\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{Ay} \quad \forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V_3$;

2) $\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{x})=(\lambda\boldsymbol{x},\boldsymbol{e})\cdot\boldsymbol{e}=\lambda\cdot(\boldsymbol{x},\boldsymbol{e})\cdot\boldsymbol{e}=\lambda\cdot\boldsymbol{Ax} \quad \forall\boldsymbol{x}\in V_3,\ \forall\lambda\in R$.

Для построения матрицы линейного оператора $\boldsymbol{A}$ найдем образы базисных векторов. Зададим координаты единичного вектора $\boldsymbol{e}$ с помощью направляющих косинусов $\boldsymbol{e}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$, где α,β,γ – углы между $\boldsymbol{e}$ и базисными векторами $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ соответственно. Тогда

$\boldsymbol{Ai} = (\boldsymbol{i},\boldsymbol{e}) \cdot \boldsymbol{e} = \cos\alpha \cdot \boldsymbol{e} = (\cos^2\alpha, \cos\alpha\cos\beta, \cos\alpha\cos\gamma)$;

$\boldsymbol{Aj} = (\boldsymbol{j},\boldsymbol{e}) \cdot \boldsymbol{e} = \cos\beta \cdot \boldsymbol{e} = (\cos\beta\cos\alpha, \cos^2\beta, \cos\beta\cos\gamma)$;

$\boldsymbol{Ak} = (\boldsymbol{k},\boldsymbol{e}) \cdot \boldsymbol{e} = \cos\gamma \cdot \boldsymbol{e} = (\cos\gamma\cos\alpha, \cos\gamma\cos\beta, \cos^2\gamma)$.

Из полученных векторов составим матрицу линейного оператора:

$$A = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha & \cos\beta\cos\alpha & \cos\gamma\cos\alpha \\ \cos\alpha\cos\beta & \cos^2\beta & \cos\gamma\cos\beta \\ \cos\alpha\cos\gamma & \cos\beta\cos\gamma & \cos^2\gamma \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Убедившись в линейности оператора $\boldsymbol{A}: R^3 \to R^3$, найти его матрицу в естественном базисе. $\boldsymbol{Ax} = (x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3)$.

<u>Решение.</u> Докажем линейность данного оператора:

1) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) =$

$= ((x_2 + y_2) + (x_3 + y_3), 2(x_1 + y_1) + (x_3 + y_3), 3(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3)) =$

$= \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Ay} \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in R^3$;

2) $\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{x}) = (\lambda x_2 + \lambda x_3, 2\lambda x_1 + \lambda x_3, 3\lambda x_1 - \lambda x_2 + \lambda x_3) = \lambda \cdot \boldsymbol{Ax} \quad \forall \boldsymbol{x} \in R^3, \ \forall \lambda \in R$.

Естественный базис в пространстве R^3 имеет вид: $\boldsymbol{e_1} = (1,0,0)$, $\boldsymbol{e_2} = (0,1,0)$, $\boldsymbol{e_3} = (0,0,1)$. Для построения матрицы линейного оператора $\boldsymbol{A}$ найдем образы базисных векторов: $\boldsymbol{Ae_1} = (0,2,3)$, $\boldsymbol{Ae_2} = (1,0,-1)$, $\boldsymbol{Ae_3} = (1,1,1)$. Из полученных векторов составим матрицу линейного оператора $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 3. Найти матрицу линейного оператора $\boldsymbol{A}$, действующего в линейной оболочке данных функций, в базисе, состоящем из этих функций. $L\left(a^x, xa^x, x^2a^x\right)$ – линейная оболочка функций a^x, xa^x, x^2a^x, $\boldsymbol{A}$ – оператор дифференцирования.

<u>Решение.</u> Применим оператор дифференцирования к трем базисным векторам: $\boldsymbol{A}\left(a^x\right) = \left(a^x\right)' = a^x \ln a$, $\boldsymbol{A}\left(xa^x\right) = \left(xa^x\right)' = a^x + xa^x \ln a$, $\boldsymbol{A}\left(x^2a^x\right) = \left(x^2a^x\right)' = 2xa^x + x^2a^x \ln a$. Образы базисных векторов в исходном базисе имеют координаты: $\boldsymbol{A}\left(a^x\right) = (\ln a, 0, 0)$, $\boldsymbol{A}\left(xa^x\right) = (1, \ln a, 0)$, $\boldsymbol{A}\left(x^2a^x\right) = (0, 2, \ln a)$. Составим матрицу линейного оператора $\boldsymbol{A}$, записав координаты образов базисных векторов по столбцам: $A = \begin{pmatrix} \ln a & 1 & 0 \\ 0 & \ln a & 2 \\ 0 & 0 & \ln a \end{pmatrix}$.

Замечание. Опираясь на теорему 1, можно найти производную от любой функции вида $f(x) = a^x\left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma\right)$, не выполняя непосредственно дифференцирование. Для этого умножим матрицу оператора дифференцирования на столбец координат функции в базисе $\left(a^x,\ xa^x,\ x^2a^x\right)$ $\begin{pmatrix} \ln a & 1 & 0 \\ 0 & \ln a & 2 \\ 0 & 0 & \ln a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \ln a + \beta \\ \beta \ln a + 2\alpha \\ \alpha \ln a \end{pmatrix}$ и получим $f'(x) = a^x\left(\alpha \ln a x^2 + (\beta \ln a + 2\alpha)x + \gamma \ln a + \beta\right)$.

Задача 4. Найти матрицу линейного оператора $\boldsymbol{A}$, действующего в линейной оболочке данных функций, в базисе, состоящем из этих функций. $L\left(e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x\right)$ – линейная оболочка функций $e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x$, $\boldsymbol{A}$ – оператор параллельного переноса вдоль оси OX на c.

Решение. Применим оператор параллельного переноса вдоль оси OX к базисным векторам.

$\boldsymbol{A}\left(e^{\alpha x}\cos\beta x\right) = e^{\alpha(x-c)}\cos\beta(x-c) = e^{-\alpha c}e^{\alpha x}(\cos\beta x\cos\beta c + \sin\beta x\sin\beta c)$,

$\boldsymbol{A}\left(e^{\alpha x}\sin\beta x\right) = e^{\alpha(x-c)}\sin\beta(x-c) = e^{-\alpha c}e^{\alpha x}(\sin\beta x\cos\beta c - \cos\beta x\sin\beta c)$. Образы базисных векторов в исходном базисе имеют координаты: $\boldsymbol{A}\left(e^{\alpha x}\cos\beta x\right) = \left(e^{-\alpha c}\cos\beta c, e^{-\alpha c}\sin\beta c\right)$, $\boldsymbol{A}\left(e^{\alpha x}\sin\beta x\right) = \left(-e^{-\alpha c}\sin\beta c, e^{-\alpha c}\cos\beta c\right)$. Составим матрицу оператора $\boldsymbol{A}$, записав координаты образов базисных векторов по столбцам: $A = \begin{pmatrix} e^{-\alpha c}\cos\beta c & -e^{-\alpha c}\sin\beta c \\ e^{-\alpha c}\sin\beta c & e^{-\alpha c}\cos\beta c \end{pmatrix}$.

3.2. Действия над линейными операторами

Пусть L_1 и L_2 – произвольные линейные пространства.

Определение. Операторы $\boldsymbol{A}: L_1 \to L_2$ и $\boldsymbol{B}: L_1 \to L_2$ называются равными, если $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{Bx}$ $\forall \boldsymbol{x} \in L_1$.

Определение. Суммой операторов $\boldsymbol{A}: L_1 \to L_2$ и $\boldsymbol{B}: L_1 \to L_2$ называется оператор $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}): L_1 \to L_2$, действующий по правилу $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Bx}$ $\forall \boldsymbol{x} \in L_1$.

Определение. Произведением оператора $\boldsymbol{A}: L_1 \to L_2$ на действительное число λ называется оператор $(\lambda\boldsymbol{A}): L_1 \to L_2$, действующий по правилу $(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \lambda \cdot \boldsymbol{Ax}$ $\forall \boldsymbol{x} \in L_1$.

Определение. Произведением операторов $\boldsymbol{A}: L_2 \to L_3$ и $\boldsymbol{B}: L_1 \to L_2$ называется оператор $(\boldsymbol{AB}): L_1 \to L_3$, действующий по правилу $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{Bx})$ $\forall \boldsymbol{x} \in L_1$.

Определение. Пусть $\boldsymbol{A}: L \to L$. Определим степень оператора $\boldsymbol{A}$ следующим образом: $\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{A}^1 = \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^2, \ldots,$ $\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{n-1}$, где $\boldsymbol{E}: L \to L$ единичный оператор, действующий по правилу $\boldsymbol{Ex} = \boldsymbol{x}$ $\forall \boldsymbol{x} \in L$.

Легко доказать следующие утверждения.

Утверждение 1. Если $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ – линейные операторы, то $\lambda\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{AB}$ также линейные операторы (при условии, что $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{AB}$ существуют).

Утверждение 2. ***В конечномерных линейных пространствах*** произведению линейного оператора на число, сумме линейных операторов и произведению линейных операторов соответствуют такие же действия с их матрицами.

Задача 1. В линейном пространстве R^2 заданы два линейных оператора $\boldsymbol{A}:R^2 \to R^2$ и $\boldsymbol{B}:R^2 \to R^2$. Найти матрицу и явный вид линейного оператора $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$. $\boldsymbol{Ax}=(-x_1+x_2, x_1+2x_2)$, $\boldsymbol{Bx}=(3x_1+x_2, 2x_1-x_2)$.

I способ. Оператор $\boldsymbol{B}$ переводит любой вектор $\boldsymbol{x}\in R^2$ в вектор $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Bx}=(3x_1+x_2, 2x_1-x_2)$. Оператор $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$ действует по правилу: $\forall \boldsymbol{x}\in R^2 \quad \boldsymbol{Cx}=(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Bx})=\boldsymbol{Ay}=$

$=(-y_1+y_2, y_1+2y_2)=\left(-(3x_1+x_2)+(2x_1-x_2), (3x_1+x_2)+2(2x_1-x_2)\right)=$

$=\left(-x_1-2x_2, 7x_1-x_2\right)$, т.е. $\boldsymbol{Cx}=\left(-x_1-2x_2, 7x_1-x_2\right)$ $\forall \boldsymbol{x}\in R^2$. Для построения матрицы линейного оператора $\boldsymbol{C}$ найдем образы базисных векторов $\boldsymbol{e_1}=(1,0)$ и $\boldsymbol{e_2}=(0,1)$ пространства R^2: $\boldsymbol{Ce_1}=(-1,7)$, $\boldsymbol{Ce_2}=(-2,-1)$. Из полученных векторов составим матрицу линейного оператора $\boldsymbol{C}$ в базисе $\boldsymbol{e}$: $C=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 7 & -1\end{pmatrix}$.

II способ. Для построения матрицы линейного оператора $\boldsymbol{A}$ найдем образы базисных векторов $\boldsymbol{e_1}=(1,0)$, $\boldsymbol{e_2}=(0,1)$ пространства R^2: $\boldsymbol{Ae_1}=(-1,1)$, $\boldsymbol{Ae_2}=(1,2)$. Из полученных векторов составим матрицу линейного оператора $\boldsymbol{A}$ в базисе $\boldsymbol{e}$: $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$. Для построения матрицы линейного оператора $\boldsymbol{B}$ найдем образы базисных векторов: $\boldsymbol{Be_1}=(3,2)$, $\boldsymbol{Be_2}=(1,-1)$. Из полученных векторов составим матрицу линейного оператора $\boldsymbol{B}$ в базисе $\boldsymbol{e}$: $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$. Тогда $C=A\cdot B=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 7 & -1\end{pmatrix}$ является матрицей линейного оператора $\boldsymbol{C}$ в базисе $\boldsymbol{e}$. По определению матрицы линейного оператора в базисе $\boldsymbol{e}$ столбцы матрицы C являются координатами образов базисных векторов, т.е. $\boldsymbol{Ce_1}=(-1,7)$, $\boldsymbol{Ce_2}=(-2,-1)$. Таким образом, $\boldsymbol{Cx}=\boldsymbol{C}(x_1\boldsymbol{e_1}+x_2\boldsymbol{e_2})=x_1\boldsymbol{Ce_1}+x_2\boldsymbol{Ce_2}=\left(-x_1-2x_2, 7x_1-x_2\right) \quad \forall \boldsymbol{x}\in R^2$.

Замечание. Явный вид оператора $\boldsymbol{C}$ можно найти, опираясь на теорему 1 (п. 3.1.). Вектор $\boldsymbol{Cx}$ в исходном базисе имеет координаты $C\cdot X=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 7 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x_1-2x_2\\ 7x_1-x_2\end{pmatrix}$, т.е. $\boldsymbol{Cx}=\left(-x_1-2x_2, 7x_1-x_2\right)$ $\forall \boldsymbol{x}\in R^2$.

Задача 2. В пространстве R^3 заданы два линейных оператора $\boldsymbol{A}: R^3 \to R^3$ и $\boldsymbol{B}: R^3 \to R^3$. Найти матрицу и явный вид линейного оператора $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} - \boldsymbol{BA}$. $\boldsymbol{Ax} = (7x_1 + 4x_3, 4x_2 - 9x_3, 3x_1 + x_2)$, $\boldsymbol{Bx} = (x_2 - 6x_3, 3x_1 + 7x_3, x_1 + x_2 - x_3)$.

Решение. Для построения матрицы линейного оператора $\boldsymbol{A}$ найдем образы базисных векторов пространства R^3: $\boldsymbol{e_1} = (1,0,0)$, $\boldsymbol{e_2} = (0,1,0)$, $\boldsymbol{e_3} = (0,0,1)$. $\boldsymbol{Ae_1} = (7,0,3)$, $\boldsymbol{Ae_2} = (0,4,1)$, $\boldsymbol{Ae_3} = (4,-9,0)$. Из полученных векторов составим матрицу линейного оператора $\boldsymbol{A}$ в базисе $\boldsymbol{e}$: $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -9 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Для построения матрицы линейного оператора $\boldsymbol{B}$ найдем образы базисных векторов: $\boldsymbol{Be_1} = (0,3,1)$, $\boldsymbol{Be_2} = (1,0,1)$, $\boldsymbol{Be_3} = (-6,7,-1)$. Из полученных векторов составим матрицу линейного оператора $\boldsymbol{B}$ в базисе $\boldsymbol{e}$: $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 11 & -46 \\ 3 & -9 & 37 \\ 3 & 3 & -11 \end{pmatrix}$, $B \cdot A = \begin{pmatrix} -18 & -2 & -9 \\ 42 & 7 & 12 \\ 4 & 3 & -5 \end{pmatrix}$,

$C = A \cdot B - B \cdot A = \begin{pmatrix} 22 & 13 & -37 \\ -39 & -16 & 25 \\ -1 & 0 & -6 \end{pmatrix}$. Матрица C является матрицей линейного оператора $\boldsymbol{C}$ в базисе $\boldsymbol{e}$. По определению матрицы линейного оператора в базисе $\boldsymbol{e}$ столбцы матрицы C являются координатами образов базисных векторов, т.е. $\boldsymbol{Ce_1} = (22,-39,-1)$, $\boldsymbol{Ce_2} = (13,-16,0)$, $\boldsymbol{Ce_3} = (-37,25,-6)$. Таким образом, $\boldsymbol{Cx} = \boldsymbol{C}(x_1\boldsymbol{e_1} + x_2\boldsymbol{e_2} + x_3\boldsymbol{e_3}) =$ $= x_1\boldsymbol{Ce_1} + x_2\boldsymbol{Ce_2} + x_3\boldsymbol{Ce_3} = (22x_1 + 13x_2 - 37x_3, -39x_1 - 16x_2 + 25x_3, -x_1 - 6x_3)$.

3.3. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису

Пусть $\boldsymbol{A}: L \to L$ – линейный оператор, действующий из L в L. Пусть $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2 \dots \boldsymbol{e}_n)$ и $\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{f}_1\ \boldsymbol{f}_2 \dots \boldsymbol{f}_n)$ – два базиса n-мерного пространства L; A_e и A_f – матрицы линейного оператора $\boldsymbol{A}$ в базисе $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{f}$ соответственно.

Теорема. ***Матрицы*** A_e ***и*** A_f ***линейного оператора*** $A: L \to L$ ***в различных базисах e и f связаны соотношением***

$$A_f = T^{-1}_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}} \cdot A_e \cdot T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}}, \tag{1}$$

где $T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}}$ матрица перехода от базиса $\boldsymbol{e}$ к базису $\boldsymbol{f}$.

Следствие. Справедливо соотношение $A_e = T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}} \cdot A_f \cdot T^{-1}_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}}$.

Задача. В пространстве L_2 оператор $\boldsymbol{A}$ в базисе $\boldsymbol{f}=(\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2)$: $\boldsymbol{f_1}=\boldsymbol{e_1}+2\boldsymbol{e_2}$, $\boldsymbol{f_2}=2\boldsymbol{e_1}+3\boldsymbol{e_2}$ имеет матрицу $A_f=\begin{pmatrix}3&5\\4&3\end{pmatrix}$. Оператор $\boldsymbol{B}$ в базисе $\boldsymbol{g}=(\boldsymbol{g_1},\boldsymbol{g_2})$: $\boldsymbol{g_1}=3\boldsymbol{e_1}+\boldsymbol{e_2}$, $\boldsymbol{g_2}=4\boldsymbol{e_1}+2\boldsymbol{e_2}$ имеет матрицу $B_g=\begin{pmatrix}4&6\\6&9\end{pmatrix}$. Найти матрицу оператора $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ в базисе $\boldsymbol{g}$.

Решение. Поскольку матрица перехода состоит из координат векторов нового базиса в старом, записанных по столбцам, матрицы перехода от $\boldsymbol{e}$ к $\boldsymbol{f}$ и от $\boldsymbol{e}$ к $\boldsymbol{g}$ имеют вид: $T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}}=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}$, $T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{g}}=\begin{pmatrix}3&4\\1&2\end{pmatrix}$. Для нахождения матрицы оператора $\boldsymbol{A}$ в базисе $\boldsymbol{g}$ воспользуемся формулой (1): $A_g=T^{-1}_{\boldsymbol{f}\to\boldsymbol{g}}\cdot A_f\cdot T_{\boldsymbol{f}\to\boldsymbol{g}}$. Для нахождения матрицы перехода от $\boldsymbol{f}$ к $\boldsymbol{g}$ воспользуемся формулой $T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{g}}=T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}}\cdot T_{\boldsymbol{f}\to\boldsymbol{g}}$. Таким образом, $T_{\boldsymbol{f}\to\boldsymbol{g}}=T^{-1}_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}}\cdot T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{g}}$. Итак,

$$T^{-1}_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}}=\begin{pmatrix}-3&2\\2&-1\end{pmatrix},\quad T_{\boldsymbol{f}\to\boldsymbol{g}}=\begin{pmatrix}-3&2\\2&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&4\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7&-8\\5&6\end{pmatrix},\quad T^{-1}_{\boldsymbol{f}\to\boldsymbol{g}}=\begin{pmatrix}-3&-4\\\frac{5}{2}&\frac{7}{2}\end{pmatrix},$$

$$A_g=T^{-1}_{\boldsymbol{f}\to\boldsymbol{g}}\cdot A_f\cdot T_{\boldsymbol{f}\to\boldsymbol{g}}=\begin{pmatrix}40&38\\-\frac{71}{2}&-34\end{pmatrix},\qquad A_g+B_g=\begin{pmatrix}44&44\\-\frac{59}{2}&-25\end{pmatrix}.\qquad A_g+B_g\ -$$

искомая матрица оператора $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ в базисе $\boldsymbol{g}$.

3.4. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора

Пусть $\boldsymbol{A}$ – линейный оператор, действующий из линейного пространства L в линейное пространство L.

Определение. ***Ненулевой*** вектор $\boldsymbol{x}\in L$ называется ***собственным вектором линейного оператора*** $A:L\to L$, если существует такое действительное число λ, что выполняется равенство $\boldsymbol{Ax}=\lambda\cdot\boldsymbol{x}$. Число λ называется ***собственным значением оператора*** $\boldsymbol{A}$, соответствующим собственному вектору $\boldsymbol{x}$.

Замечание. Равенство $\boldsymbol{Ax}=\lambda\cdot\boldsymbol{x}$ можно записать в виде $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\theta}$, где $\boldsymbol{E}:L\to L$ единичный оператор, действующий по правилу $\boldsymbol{Ex}=\boldsymbol{x}\quad\forall\boldsymbol{x}\in L$.

Утверждение 1. Если $\boldsymbol{x}$ собственный вектор оператора $\boldsymbol{A}$, отвечающий собственному значению λ, то для любого числа $k\neq 0$ вектор $k\boldsymbol{x}$ также является собственным вектором оператора $\boldsymbol{A}$, отвечающим собственному значению λ.

Действительно, $\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{x})=k\cdot\boldsymbol{Ax}=k\cdot(\lambda\boldsymbol{x})=\lambda\cdot(k\boldsymbol{x})$.

Утверждение 2. Если $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ собственные векторы оператора $\boldsymbol{A}$, отвечающие собственному значению λ, то вектор $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ также является собственным вектором, отвечающий собственному значению λ.
Действительно, $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{Ay}=\lambda\cdot\boldsymbol{x}+\lambda\cdot\boldsymbol{y}=\lambda\cdot(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$.

Замечание. Множество всех собственных векторов, отвечающих данному собственному значению линейного оператора $\boldsymbol{A}$, не является линейным подпространством пространства L, т.к. это множество не содержит нулевого элемента. Добавив к этому множеству нулевой элемент, получим линейное подпространство пространства L, которое называется ***собственным подпространством линейного оператора.***

Утверждение 3. Собственный вектор линейного оператора $\boldsymbol{A}$ может отвечать только одному собственному значению λ.

Теорема. Собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы.

Следствие. Линейный оператор, действующий в n-мерном пространстве, не может иметь более чем n различных собственных значений.

Определение. Пусть A – матрица линейного оператора $\boldsymbol{A}:L\to L$ в некотором базисе. ***Характеристическим многочленом оператора A относительно числа*** λ называется многочлен вида $P(\lambda)=\det(A-\lambda E)=|A-\lambda E|$.

Утверждение. Характеристический многочлен оператора $\boldsymbol{A}$ не зависит от выбора базиса.
Действительно, Матрицы A_e и A_f линейного оператора $\boldsymbol{A}:L\to L$ в различных базисах $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{f}$ связаны соотношением $A_f=T^{-1}_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}}\cdot A_e\cdot T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}}$.
Поэтому

$$\left|A_f-\lambda E\right|=\left|T^{-1}_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}}\cdot A_e\cdot T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}}-T^{-1}_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}}\cdot\lambda\cdot E\cdot T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}}\right|=\left|T^{-1}_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}}\cdot(A_e-\lambda E)\cdot T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}}\right|=$$

$$=\left|T^{-1}_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}}\right|\cdot\left|A_e-\lambda E\right|\cdot\left|T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}}\right|=\left|A_e-\lambda E\right|.$$

Определение. Уравнение $|A-\lambda E|=0$ называется ***характеристическим уравнением оператора A***.

Теорема. Для того чтобы число λ являлось собственным значением оператора $\boldsymbol{A}$, необходимо и достаточно, чтобы оно было действительным корнем характеристического уравнения оператора $\boldsymbol{A}$.

Замечание. Чтобы найти собственный вектор $\boldsymbol{x}$, отвечающий собственному значению λ, надо решить СЛАУ $(A-\lambda E)\cdot X=O$, где X – матрица-столбец координат вектора $\boldsymbol{x}$, O – нулевая матрица-столбец.

Задача 1. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\boldsymbol{A}:V_3\to V_3$. $\boldsymbol{Ax}=[\boldsymbol{i},\boldsymbol{x}]$.

<u>I способ (формальный).</u> Найдем матрицу линейного оператора в базисе $\boldsymbol{e}=(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})$. $\boldsymbol{Ai}=[\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}]=\boldsymbol{0}=(0,0,0)$, $\boldsymbol{Aj}=[\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}]=\boldsymbol{k}=(0,0,1)$,

$\boldsymbol{Ak} = [\boldsymbol{i}, \boldsymbol{k}] = -\boldsymbol{j} = (0,-1,0)$. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Запишем характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$. Разложив определитель по первой строке, получим уравнение $-\lambda(\lambda^2 + 1) = 0$. $\lambda = 0$ – действительный корень характеристического уравнения. Координаты собственного вектора, отвечающего собственному значению $\lambda = 0$, найдем из однородной СЛАУ $(A - \lambda E) \cdot X = O$ при $\lambda = 0$: $\begin{cases} 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 - x_3 = 0 \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 = 0 \end{cases}$. Решение системы имеет вид: $x_2 = x_3 = 0, x_1 = \alpha$, где α – любое действительное число. Таким образом, $\boldsymbol{x} = (\alpha,0,0)$ $\forall \alpha \neq 0$ является собственным вектором, отвечающим собственному значению $\lambda = 0$.

II способ. Пусть $\boldsymbol{x}$ – собственный вектор оператора $\boldsymbol{A}$, отвечающий собственному значению λ, тогда $\boldsymbol{Ax} = [\boldsymbol{i}, \boldsymbol{x}] = \lambda \boldsymbol{x}$. Учитывая, что вектор $[\boldsymbol{i}, \boldsymbol{x}]$ перпендикулярен вектору $\boldsymbol{x}$, а вектор $\lambda \boldsymbol{x}$ при $\lambda \neq 0$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{x}$, получим, что при $\lambda \neq 0$ уравнение $[\boldsymbol{i}, \boldsymbol{x}] = \lambda \boldsymbol{x}$ не имеет нетривиального решения. При $\lambda = 0$ последнее уравнение принимает вид $[\boldsymbol{i}, \boldsymbol{x}] = \boldsymbol{0}$. Нетривиальным решением данного уравнения являются все ненулевые векторы $\boldsymbol{x}$ коллинеарные вектору $\boldsymbol{i}$, т.е. $\boldsymbol{x} = (\alpha,0,0)$ $\forall \alpha \neq 0$. Таким образом, $\boldsymbol{x} = (\alpha,0,0)$ $\forall \alpha \neq 0$ является собственным вектором оператора $\boldsymbol{A}$, отвечающим собственному значению $\lambda = 0$.

Задача 2. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Запишем характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$. Разложив определитель по третьему столбцу, приведем характеристическое уравнение к виду $(\lambda - 2)^3 = 0$. $\lambda = 2$ – корень характеристического уравнения кратности 3. Координаты собственного вектора, отвечающего собственному значению $\lambda = 2$, найдем из однородной СЛАУ $(A-\lambda E)\cdot X=O$ при $\lambda=2$: $\begin{cases}-2x_1+x_2+0x_3=0\\-4x_1+2x_2+0x_3=0\\-2x_1+x_2+0x_3=0\end{cases}$.

Вычеркнув из системы второе и третье уравнения, придем к уравнению $-2x_1+x_2=0$. Решение СЛАУ имеет вид: $x_1=\alpha,\ x_2=2\alpha,\ x_3=\beta\quad\forall\alpha,\beta$. Таким образом, $\boldsymbol{x}=(\alpha,2\alpha,\beta)$ для любых действительных α и β, одновременно не равных нулю, является собственным вектором оператора $\boldsymbol{A}$, отвечающим собственному значению $\lambda=2$.

Замечание. Собственный вектор $\boldsymbol{x}=(\alpha,2\alpha,\beta)$ можно представить в виде линейной комбинации двух линейно независимых векторов $\boldsymbol{x}=\alpha(1{,}1{,}0)+\beta(0{,}0{,}1)$. Векторы $\boldsymbol{e_1}=(1{,}1{,}0)$ и $\boldsymbol{e_2}=(0{,}0{,}1)$ порождают собственное подпространство линейного оператора $\boldsymbol{A}$, отвечающее собственному значению $\lambda=2$.

Задача 3. В линейном пространстве $C^{\infty}(R)$ бесконечно дифференцируемых на R функций найти все собственные векторы оператора дифференцирования.

Решение. Пусть $f(x)$ – собственный вектор оператора дифференцирования, отвечающий собственному значению λ, тогда $\boldsymbol{A}f(x)=f'(x)=\lambda f(x)$. Функция $f(x)$ является решением дифференциального уравнения с разделяющимися переменными $f'(x)=\lambda f(x)$. $f(x)=0$ является частным решением этого уравнения. Разделив переменные, решим дифференциальное уравнение: $\dfrac{df}{f}=\lambda dx$; $\ln|f|=\lambda x+\ln|c|\quad\forall c\neq0$; $f(x)=ce^{\lambda x}\quad\forall c\neq0$. Добавив решение $f(x)=0$, получим общее решение дифференциального уравнения: $f(x)=ce^{\lambda x}\ \forall c\in R$. Таким образом, $f(x)=ce^{\lambda x}\quad\forall c\neq0$ является собственным вектором оператора дифференцирования, отвечающим собственному значению $\lambda\quad\forall\lambda\in R$.

Задача 4. Доказать, что характеристический многочлен кососимметрической матрицы четного порядка n является четной функцией.

Решение. Матрица является кососимметрической, если $A^T=-A$. Запишем характеристический многочлен и преобразуем его, используя свойства определителей:

$p(\lambda)=|A-\lambda E|=\left|(A-\lambda E)^T\right|=\left|A^T-\lambda E^T\right|=|-A-\lambda E|=(-1)^n|A+\lambda E|$. Поскольку n четно, $(-1)^n=1$ и, следовательно, $p(\lambda)=|A+\lambda E|=p(-\lambda)$ для $\forall\lambda\in R$, т.е. $p(\lambda)$ – четная функция.

3.5. Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду

Пусть L – произвольное конечномерное линейное пространство.

Теорема. ***Матрица линейного оператора $A:L\to L$ в некотором базисе является диагональной тогда и только тогда, когда все векторы этого базиса являются собственными векторами оператора A.***

Докажем эту теорему.

1. Пусть матрица линейного оператора в базисе $\boldsymbol{e}=(\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,...,\boldsymbol{e}_n)$ имеет вид: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$. Учитывая, что i-й столбец матрицы линейного оператора A в базисе $\boldsymbol{e}$ является столбцом координат вектора $A\boldsymbol{e}_i$, $i=1,2,...,n$, в базисе $\boldsymbol{e}$, получим: $A\boldsymbol{e}_1=(a_{11},0,...,0)=a_{11}\cdot\boldsymbol{e}_1$, $A\boldsymbol{e}_2=(0,a_{22},...,0)=a_{22}\cdot\boldsymbol{e}_2$, …, $A\boldsymbol{e}_n=(0,0,...,a_{nn})=a_{nn}\cdot\boldsymbol{e}_n$. Таким образом, вектор $\boldsymbol{e}_1$ является собственным вектором оператора A, отвечающим собственному значению a_{11}, вектор $\boldsymbol{e}_2$ – собственным вектором, отвечающим собственному значению a_{22}, …, вектор $\boldsymbol{e}_n$ – собственным вектором, отвечающим собственному значению a_{nn}.

2. Пусть векторы базиса $\boldsymbol{e}=(\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,...,\boldsymbol{e}_n)$ являются собственными векторами оператора A, отвечающими собственным значениям $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ соответственно. Тогда $A\boldsymbol{e}_1=\lambda_1\cdot\boldsymbol{e}_1=(\lambda_1,0,...,0)$, $A\boldsymbol{e}_2=\lambda_2\cdot\boldsymbol{e}_2=(0,\lambda_2,...,0)$, …, $A\boldsymbol{e}_n=\lambda_n\cdot\boldsymbol{e}_n=(0,0,...,\lambda_n)$. Матрица линейного оператора в базисе $\boldsymbol{e}=(\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2 ... \boldsymbol{e}_n)$ имеет вид: $A=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Замечание. Если матрица линейного оператора $A:L\to L$ в базисе $\boldsymbol{e}=(\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,...,\boldsymbol{e}_n)$ является диагональной, то на ее диагонали расположены собственные значения оператора A, повторяющиеся столько раз, какова их кратность.

Следствие 1. Если характеристическое уравнение линейного оператора, действующего в n-мерном линейном пространстве, имеет n попарно различных действительных корней, то существует базис, в котором матрица линейного оператора является диагональной.

Замечание. Если характеристическое уравнение линейного оператора имеет кратные действительные корни, то может не существовать базиса, в котором матрица линейного оператора будет диагональной.

Действительно, пусть матрица линейного оператора в некотором базисе имеет вид $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$. Решим характеристическое уравнение $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda & 1\\ 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)^2=0$. $\lambda=2$ – корень характеристического уравнения кратности 2. Координаты собственного вектора, отвечающего собственному значению $\lambda=2$, найдем из СЛАУ $(A-\lambda E)\cdot X=O$ при $\lambda=2$: $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$. Решение системы имеет вид: $x_1=\alpha,\, x_2=0 \quad \forall\alpha$. Таким образом, $\boldsymbol{x}=(\alpha,0)=\alpha(1,0)$ для любого действительного $\alpha\neq 0$, является собственным вектором оператора $\boldsymbol{A}$, отвечающим собственному значению $\lambda=2$. Собственное подпространство линейного оператора $\boldsymbol{A}$, отвечающее собственному значению $\lambda=2$ одномерно, а оператор $\boldsymbol{A}$ действует в двумерном пространстве. Поэтому в данном линейном пространстве не существует базиса, состоящего из собственных векторов оператора $\boldsymbol{A}$, и, следовательно, не существует базиса, в котором матрица линейного оператора является диагональной.

Следствие 2. Существует базис, в котором матрица линейного оператора $\boldsymbol{A}:L\to L$ является диагональной тогда и только тогда, когда сумма размерностей всех собственных подпространств линейного оператора $\boldsymbol{A}$ равна размерности линейного пространства L.

Задача. Привести матрицу линейного оператора к диагональному виду. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ – матрица линейного оператора в некотором базисе $\boldsymbol{e}$. Указать базис $\boldsymbol{f}$, в котором матрица линейного оператора имеет диагональный вид.

<u>Решение.</u> Найдем собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\boldsymbol{A}$. Запишем характеристическое уравнение $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0$. Разложив определитель по первой строке, приведем характеристическое уравнение к виду $\lambda^2(\lambda-3)=0$. $\lambda_1=\lambda_2=0$, $\lambda_3=3$ – корни характеристического уравнения. Чтобы построить базис из собственных векторов, надо для каждого собственного значения λ найти фундаментальную систему решений СЛАУ $(A-\lambda E)\cdot X=O$. Для $\lambda_1=\lambda_2=0$ СЛАУ имеет вид $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+x_2+x_3=0\end{cases}$. Ранг матрицы системы равен 1, поэтому

ФСР системы состоит из $n-r=3-1=2$ решений. Вычеркнув из системы второе и третье уравнение, придем к уравнению $x_1=-x_2-x_3$. Общее решение СЛАУ имеет вид $X=\begin{pmatrix}-\alpha-\beta\\ \alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ $\forall\alpha,\beta$, где $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ – ФСР системы. Для $\lambda_3=3$ СЛАУ имеет вид $\begin{cases}-2x_1+x_2+x_3=0\\ x_1-2x_2+x_3=0\\ x_1+x_2-2x_3=0\end{cases}$. Ранг матрицы системы равен 2, поэтому ФСР системы состоит из $n-r=3-2=1$ решения. Решив СЛАУ, получим общее решение системы $X=\begin{pmatrix}\alpha\\ \alpha\\ \alpha\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\forall\alpha$, где $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ – ФСР системы.

Таким образом, найденные векторы $\boldsymbol{f_1}=(-1,1,0)$, $\boldsymbol{f_2}=(-1,0,1)$, $\boldsymbol{f_3}=(1,1,1)$ образуют искомый базис, состоящий из собственных векторов оператора $\boldsymbol{A}$. Матрица линейного оператора в этом базисе имеет вид $A_f=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}$. На диагонали матрицы A_f расположены собственные значения оператора $\boldsymbol{A}$, повторяющиеся столько раз, какова их кратность.

Замечание. Матрица перехода от базиса $\boldsymbol{e}$ к базису $\boldsymbol{f}$ имеет вид $T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}}=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$, причем $A_f=T^{-1}_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}}\cdot A\cdot T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}}$ (см. формулу (1) п. 3.3.).

Задачи для самостоятельного решения.

1. Доказать, что всякий линейный оператор переводит линейно зависимую систему векторов снова в линейно зависимую систему.

2. Пусть $\boldsymbol{e_1},\ldots,\boldsymbol{e_k}$ – линейно независимые векторы линейного пространства L, $\boldsymbol{f_1},\ldots,\boldsymbol{f_k}$ – произвольные векторы линейного пространства L_1. Доказать, что существует такой линейный оператор $\boldsymbol{A}:L\to L_1$, что выполняется $\boldsymbol{Ae_i}=\boldsymbol{f_i}$. $\forall\, i=1,2,\ldots,k$.

3. Проверить, будут ли данные операторы линейными.

1) $\boldsymbol{A}: R^n \to R^n$, $\forall \boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n)$ $\boldsymbol{Ax} = (x_1, ..., x_k, 0, ..., 0)$ при фиксированном значении k, $1 \le k \le n$, (оператор проектирования).
2) $\boldsymbol{A}: R^n \to R^n$, $\forall \boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n)$ $\boldsymbol{Ax} = ({x_1}^2, ..., {x_n}^2)$.
3) $\boldsymbol{A}: R^n \to R$, $\forall \boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n)$ $\boldsymbol{Ax} = a_1 x_1 + ... + a_n x_n$ при фиксированных значениях $a_1, ..., a_n$.
4) $\boldsymbol{A}: V_3 \to R$, $\boldsymbol{Ax} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x})$ для фиксированного вектора $\boldsymbol{a}$.
5) $\boldsymbol{A}: V_3 \to V_3$, $\boldsymbol{Ax} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x})\boldsymbol{x}$ для фиксированного вектора $\boldsymbol{a}$.
6) $\boldsymbol{A}: L \to R$, где L – пространство сходящихся последовательностей, $\boldsymbol{A}(\{a_n\}) = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$.
7) $\boldsymbol{A}: L \to R$, где L – пространство арифметических прогрессий, $\boldsymbol{A}(\{a_n\}) = d$, где d – разность данной прогрессии.
8) $\boldsymbol{A}: L \to L$, где L – пространство всех последовательностей, $\boldsymbol{A}(\{a_n\}) = \{b_n\}$, где $b_n = a_{n+m}$ при фиксированном значении m (оператор смещения).
9) $\boldsymbol{A}: L \to L$, где L – пространство всех последовательностей, $\boldsymbol{A}(\{a_n\}) = \{b_n\}$, где $b_n = a_{n+1} - a_n$ (разностный оператор).
10) $\boldsymbol{A}: C[a, b] \to R$, $\boldsymbol{A}(f(x)) = f(a)$.
11) $\boldsymbol{A}: C[a, b] \to R$, $\boldsymbol{A}(f(x)) = \int\limits_a^b f(x)dx$.
12) $\boldsymbol{A}: C^1(R) \to C(R)$, где $C^1(R)$ – пространство непрерывно дифференцируемых функций на R, $\boldsymbol{A}(f(x)) = f'(x)$ (оператор дифференцирования).
13) $\boldsymbol{A}: C(R) \to C(R)$, $\boldsymbol{A}(f(x)) = f(x - a)$ при фиксированном значении a (оператор параллельного переноса вдоль оси X на a).
14) $\boldsymbol{A}: M_{n \times n} \to R$, $\boldsymbol{A}(B) = \det B$.
15) $\boldsymbol{A}: M_{n \times n} \to R^n$, $\boldsymbol{A}(B) = (b_{11}, ..., b_{nn})$.
16) $\boldsymbol{A}: M_{n \times n} \to M_{n \times n}$, $\boldsymbol{A}(B) = BC$ для фиксированной матрицы C размера $n \times n$.

4. Составить матрицу линейного оператора $\boldsymbol{A}$, действующего в пространстве L в естественном базисе.

1) $L = V_3$, $\boldsymbol{A}$ – оператор поворота вокруг оси Y на угол φ.
2) $L = V_3$, $\boldsymbol{Ax} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}]$, где $\boldsymbol{a} = (\alpha, \beta, \gamma)$ – фиксированный вектор.
3) $L = R^n$, $\forall \boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n)$ $\boldsymbol{Ax} = (x_2, x_3, ..., x_n, x_1)$ (оператор циклической перестановки).
4) $L = P_3$, $\boldsymbol{A}$ – оператор дифференцирования.
5) $L = P_2$, $\boldsymbol{A}$ – оператор параллельного переноса вдоль оси X на a.
6) $L = M_{2 \times 2}$, $\boldsymbol{A}(B) = BC$, где $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ – фиксированная матрица.

5. Составить матрицу линейного оператора $\boldsymbol{A}$, действующего в линейной оболочке L данных функций, в базисе, состоящем из этих функций.

1) L – линейная оболочка функций $\{a^x, \sin bx, \cos bx\}$, $\boldsymbol{A}$ – оператор дифференцирования.
2) L – линейная оболочка функций $\{a^x, \sin bx, \cos bx\}$, $\boldsymbol{A}$ – оператор второй производной.
3) L – линейная оболочка функций $\{a^x, \sin bx, \cos bx\}$, $\boldsymbol{A}$ – оператор параллельного переноса вдоль оси X на c.
4) L – линейная оболочка функций $\{e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x\}$, $\boldsymbol{A}$ – оператор дифференцирования.
5) L – линейная оболочка функций $\{a^x, xa^x, x^2a^x\}$, $\boldsymbol{A}$ – оператор параллельного переноса вдоль оси X на c.

6. Доказать, что ненулевое число λ является собственным значением невырожденной квадратной матрицы A тогда и только тогда, когда λ^{-1} является собственным значением матрицы A^{-1}. Как при этом связаны собственные векторы матриц A и A^{-1}?

7. Пусть $\boldsymbol{x}$ – собственный вектор оператора $\boldsymbol{A}$, λ – соответствующее собственное значение. Доказать, что $\boldsymbol{x}$ будет также собственным вектором для оператора $\boldsymbol{A}^k$. Каково будет соответствующее собственное значение?

8. Пусть $p(\lambda)$ – характеристический многочлен матрицы $A_{2\times2}$. Доказать, что $p(A)=O$, где O – нулевая матрица.

Указание. Пусть $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Тогда $p(\lambda)=\lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc$. Далее нужно непосредственно найти $p(A)$.

9. В линейном пространстве $C^\infty(R)$ бесконечно дифференцируемых на R функций найти все собственные векторы оператора второй производной.

10. Сумма элементов каждой строки невырожденной матрицы A равна λ. Доказать, что сумма элементов каждой строки матрицы A^{-1} равна λ^{-1}.
Указание. Заметим, что вектор $\boldsymbol{x}=(1,\ldots,1)$ является собственным вектором матрицы A, отвечающим собственному значению λ. Далее нужно доказать, что вектор $\boldsymbol{x}$ также является собственным вектором матрицы A^{-1}, отвечающим собственному значению λ^{-1}.

11. Привести матрицу линейного оператора к диагональному виду. Указать матрицу перехода. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Глава IV. Линейные операторы в евклидовых пространствах

4.1. Сопряженные и самосопряженные операторы и их матрицы в ортонормированном базисе. Свойства собственных значений и собственных векторов самосопряженного оператора

Пусть E – конечномерное евклидово пространство.

Определение. Оператор $A^*:E\to E$ называется ***сопряженным*** к линейному оператору $A:E\to E$, если для любых векторов $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in E$ выполняется равенство $(A\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},A^*\boldsymbol{y})$.

Утверждение. Оператор A^*, сопряженный к линейному оператору A, является линейным.

Теорема. Любому линейному оператору $A:E\to E$ соответствует единственный сопряженный оператор $A^*:E\to E$, причем матрицей сопряженного оператора A^* в любом ***ортонормированном базисе e*** является транспонированная матрица исходного оператора A в том же ***ортонормированном*** базисе $\boldsymbol{e}$: $A^*=A^T$.

Задача 1. Для данного оператора A в евклидовом пространстве V_3 найти сопряженный оператор A^*. $A\boldsymbol{x}=[\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}]$, где $\boldsymbol{a}$ – фиксированный вектор.

<u>Решение.</u> $(A\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=([\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}],\boldsymbol{y})=\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{a}\rangle=(\boldsymbol{x},[\boldsymbol{y},\boldsymbol{a}])=(\boldsymbol{x},A^*\boldsymbol{y})\ \ \forall\ \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V_3$. (Через $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle$ обозначено смешанное произведение векторов). Следовательно, $A^*\boldsymbol{x}=[\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}]=-[\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}]=-A\boldsymbol{x}$, т.е. $A^*=-A$.

Задача 2. Для данного оператора A в евклидовом пространстве L найти сопряженный оператор A^*. $L=\{f(x)\in C^1[a,b]:f(a)=f(b)=0\}$, где $C^1[a,b]$ – пространство непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[a,b]$, A – оператор дифференцирования.

<u>Решение.</u> Рассмотрим $\forall f(x),\ g(x)\in C^1[a,b]$. $(Af,g)=\int\limits_a^b f'(x)g(x)dx$. Учитывая, что $f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$, применим формулу интегрирования по частям. $\int\limits_a^b f'(x)g(x)dx=\int\limits_a^b g(x)df(x)=f(x)g(x)\Big|_a^b-\int\limits_a^b f(x)dg(x)=-\int\limits_a^b f(x)g'(x)dx$.

Таким образом, поскольку $(Af,g)=(f,A^*g)=(f,-Ag)$, то $A^*=-A$.

Определение. Линейный оператор $A:E\to E$ называется ***самосопряженным***, если $A^*=A$, т.е. $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in E$ выполняется равенство $(A\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},A\boldsymbol{y})$.

Пример. Самосопряженными являются нулевой оператор $\boldsymbol{O}$ и единичный оператор $\boldsymbol{E}$. Действительно, $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in E$ выполняется

$(\boldsymbol{O}\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\theta,\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\theta)=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{O}\boldsymbol{y})$; $(\boldsymbol{E}\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{E}\boldsymbol{y})$.

Теорема. Матрица самосопряженного оператора в любом ***ортонормированном базисе*** является симметрической, т.е. $A=A^T$.

Теорема. Если матрица A линейного оператора $\boldsymbol{A}:E\to E$ в некотором ***ортонормированном базисе*** является симметрической ($A=A^T$), то оператор $\boldsymbol{A}$ является самосопряженным.

Перечислим **свойства собственных значений и собственных векторов самосопряженного оператора**.

Теорема 1. Все корни характеристического уравнения самосопряженного оператора действительны (т.е. все собственные значения самосопряженного оператора действительные).

Следствие. Самосопряженный оператор, действующий в n-мерном евклидовом пространстве, имеет равно n собственный значений, если каждое из них считать столько раз, какова его кратность.

Теорема 2. Собственные векторы самосопряженного оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

Теорема 3. Если все собственные значения $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ самосопряженного оператора $\boldsymbol{A}$, действующего в n-мерном евклидовом пространстве E, попарно различны, то в E существует ***ортонормированный базис***, состоящий из собственных векторов оператора $\boldsymbol{A}$, в котором матрица A линейного оператора $\boldsymbol{A}$ имеет диагональный вид: $A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & ... & 0\\ 0 & \lambda_2 & ... & 0\\ ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & ... & \lambda_n\end{pmatrix}$.

Замечание. Если среди корней характеристического уравнения самосопряженного оператора встречаются кратные корни, то справедлива теорема 4.

Теорема 4. ***Для любого самосопряженного оператора $\boldsymbol{A}$ существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора $\boldsymbol{A}$. Матрица A линейного оператора $\boldsymbol{A}$ в этом базисе имеет диагональный вид, на диагонали расположены собственные значения оператора $\boldsymbol{A}$, повторяющиеся столько раз, какова их кратность.***

4.2. Ортогональные операторы и ортогональные матрицы

Пусть E – конечномерное евклидово пространство.

Определение. Линейный оператор $\boldsymbol{A}:E\to E$ называется ***ортогональным оператором***, если он сохраняет скалярное произведение в E, т.е. $\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in E$ выполняется равенство $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$.

Замечание 1. Ортогональный оператор сохраняет норму элементов евклидова пространства.
Действительно, $\|\boldsymbol{Ax}\|^2 = (\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ax}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|^2 \quad \forall \boldsymbol{x} \in E$.

Замечание 2. Ортогональный оператор сохраняет угол между элементами евклидова пространства.
Действительно, $\cos\angle(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay}) = \dfrac{(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay})}{\|\boldsymbol{Ax}\| \cdot \|\boldsymbol{Ay}\|} = \dfrac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|} = \cos\angle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. Здесь $\angle(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay})$ – угол между элементами $\boldsymbol{Ax}$ и $\boldsymbol{Ay}$, $\angle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ – угол между элементами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$.

Теорема. Если линейный оператор $A : E \to E$ сохраняет норму в E, т.е. $\|\boldsymbol{Ax}\| = \|\boldsymbol{x}\| \quad \forall \boldsymbol{x} \in E$, то этот оператор ортогональный.

Пример. В пространствах V_2, V_3 линейный оператор поворота вектора на фиксированный угол является ортогональным, т.к. при повороте длины векторов не изменяются.

Теорема 1. Оператор $A : E \to E$ является ортогональным тогда и только тогда, когда он переводит произвольный ортонормированный базис в E в ортонормированный базис в E.

Определение. ***Квадратная матрица*** U ***называется ортогональной***, если она удовлетворяет условию $U^{-1} = U^T$.

Примеры.

1. Единичная матрица E является ортогональной.
2. Матрица $U = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ ортогональная. Напомним, что матрица U является матрицей линейного оператора поворота вектора, лежащего на плоскости, на фиксированный угол φ против часовой стрелки в базисе $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$.

Замечание 1. Пусть U – ортогональная матрица, тогда $U^T U = U U^T = E$.

Замечание 2. Определитель ортогональной матрицы может иметь одно из двух возможных значений: $\det U = 1$ или $\det U = -1$.

Теорема 2. Матрица ортогонального оператора в любом ортонормированном базисе ортогональна; и наоборот, если матрица линейного оператора в некотором ортонормированном базисе ортогональна, то этот оператор является ортогональным.

Теорема 3. Матрица U является матрицей перехода от одного ортонормированного базиса конечномерного евклидова пространства к другому ортонормированному базису того же пространства тогда и только тогда, когда матрица U является ортогональной.

4.3. Приведение симметрической матрицы ортогональным преобразованием к диагональному виду

Пусть E – произвольное конечномерное евклидово пространство.

Матрицы A_e и A_f линейного оператора $\boldsymbol{A}: E \to E$ в различных базисах $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{f}$ связаны соотношением

$$A_f = T^{-1}_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}} \cdot A_e \cdot T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}}, \qquad (1)$$

где $T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}}$ матрица перехода от базиса $\boldsymbol{e}$ к базису $\boldsymbol{f}$ (гл. III, п. 3.3). Если базисы $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{f}$ являются ортонормированными, то матрица перехода от базиса $\boldsymbol{e}$ к базису $\boldsymbol{f}$ является ортогональной, т.е. $T^{-1}_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}} = T^{T}_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}}$, поэтому соотношение (1) можно записать следующим образом

$$A_f = T^{T}_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}} \cdot A_e \cdot T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}}. \qquad (2)$$

Теорема. ***Любая симметрическая матрица ортогональным преобразованием приводится к диагональному виду***, т.е. для любой симметрической матрицы A ($A = A^T$) существует ортогональная матрица U ($U^{-1} = U^T$) такая, что $U^T A U = \Lambda$, где Λ – диагональная матрица, диагональными элементами которой являются собственные значения матрицы A, повторяющиеся столько раз, какова их кратность.

Замечание. Из доказательства теоремы следует, что U является матрицей перехода из старого ортонормированного базиса к новому ортонормированному базису, состоящему из собственных векторов матрицы A.

Задача 1. Привести матрицу $A = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}$ к диагональному виду ортогональным преобразованием. Указать матрицу перехода.

<u>Решение.</u> а) Матрица A является симметрической: $A = A^T$. Любую симметрическую матрицу можно рассматривать как матрицу некоторого самосопряженного оператора в некотором ортонормированном базисе $\boldsymbol{e}$.

б) Найдем собственные значения матрицы A. Для этого решим характеристическое уравнение

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 11-\lambda & 2 & -8 \\ 2 & 2-\lambda & 10 \\ -8 & 10 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 18)(\lambda - 9)(\lambda + 9) = 0. \quad \lambda_1 = 18, \quad \lambda_2 = 9,$$

$\lambda_3 = -9$ – корни характеристического уравнения.

в) Чтобы построить базис из собственных векторов, надо для каждого собственного значения λ найти фундаментальную систему решений СЛАУ $(A - \lambda E) \cdot X = O$.

Для $\lambda_1 = 18$ СЛАУ имеет вид $\begin{cases} -7x_1 + 2x_2 - 8x_3 = 0 \\ 2x_1 - 16x_2 + 10x_3 = 0 \\ -8x_1 + 10x_2 - 13x_3 = 0 \end{cases}$. Ранг матрицы системы равен 2, поэтому ФСР системы состоит из $n - r = 3 - 2 = 1$ решения. Решив СЛАУ, получим общее решение системы $X = \begin{pmatrix} -\alpha \\ \frac{\alpha}{2} \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ $\forall \alpha$, где $\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ – ФСР системы. Нормируя этот вектор, получим $\boldsymbol{f_1} = (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

Для $\lambda_2 = 9$ СЛАУ имеет вид $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 8x_3 = 0 \\ 2x_1 - 7x_2 + 10x_3 = 0 \\ -8x_1 + 10x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$. Ранг матрицы системы равен 2, поэтому ФСР системы состоит из $n - r = 3 - 2 = 1$ решения. Решив СЛАУ, получим общее решение системы $X = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ 2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\forall \alpha$, где $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ – ФСР системы. Нормируя этот вектор, получим $\boldsymbol{f_2} = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

Для $\lambda_3 = -9$ СЛАУ имеет вид $\begin{cases} 20x_1 + 2x_2 - 8x_3 = 0 \\ 2x_1 + 11x_2 + 10x_3 = 0 \\ -8x_1 + 10x_2 + 14x_3 = 0 \end{cases}$. Ранг матрицы системы равен 2, поэтому ФСР системы состоит из $n - r = 3 - 2 = 1$ решения. Решив СЛАУ, получим общее решение системы $X = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2} \\ -\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\forall \alpha$, где $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ – ФСР системы. Нормируя этот вектор, получим $\boldsymbol{f_3} = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

Поскольку собственные векторы самосопряженного оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны (теорема 2 п. 4.1.), найденные векторы $\boldsymbol{f_1} = (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $\boldsymbol{f_2} = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$, $\boldsymbol{f_3} = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ образуют ортонормированный базис из собственных векторов. Матрица линейного оператора в этом базисе имеет вид $A_f = \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$.

г) Заметим, что мы получили координаты векторов нового базиса $\boldsymbol{f}$ в исходном базисе $\boldsymbol{e}$. Таким образом, матрица перехода от базиса $\boldsymbol{e}$ к базису $\boldsymbol{f}$ имеет вид $U=\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$. Поскольку U является матрицей перехода от ортонормированного базиса к ортонормированному базису, матрица U является ортогональной, поэтому справедливо равенство $A_f = U^{-1}AU = U^T AU$.

Задача 2. Привести матрицу $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ к диагональному виду ортогональным преобразованием. Указать матрицу перехода.

Решение. а) Матрица A является симметрической: $A = A^T$. Любую симметрическую матрицу можно рассматривать как матрицу некоторого самосопряженного оператора в некотором ортонормированном базисе $\boldsymbol{e}$.

б) Найдем собственные значения матрицы A. Для этого решим характеристическое уравнение

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda-10)=0. \quad \lambda_1=\lambda_2=1, \quad \lambda_3=10 \ -$$

корни характеристического уравнения.

в) Чтобы построить базис из собственных векторов, надо для каждого собственного значения λ найти фундаментальную систему решений СЛАУ $(A-\lambda E)\cdot X = O$.

Для $\lambda_3=10$ СЛАУ имеет вид $\begin{cases} -8x_1+2x_2-2x_3=0 \\ 2x_1-5x_2-4x_3=0 \\ -2x_1-4x_2-5x_3=0 \end{cases}$. Ранг матрицы системы равен 2, поэтому ФСР системы состоит из $n-r=3-2=1$ решения. Решив СЛАУ, получим общее решение системы $X=\begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{2} \\ -\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\forall \alpha$, где $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ – ФСР системы. Нормируя этот вектор, получим $\boldsymbol{f_3} = (-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

Для $\lambda_1=\lambda_2=1$ СЛАУ имеет вид $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=0 \\ 2x_1+4x_2-4x_3=0 \\ -2x_1-4x_2+4x_3=0 \end{cases}$. Ранг матрицы системы равен 1, поэтому ФСР системы состоит из $n-r=3-1=2$ решений.

Вычеркнув из системы второе и третье уравнения, придем к уравнению $x_1 = -2x_2 + 2x_3$. Общее решение СЛАУ имеет вид $X = \begin{pmatrix} -2\alpha + 2\beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ \forall \alpha, \beta$, где $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ – ФСР системы.

Найденные собственные векторы $\boldsymbol{a_1} = (-2,1,0)$ и $\boldsymbol{a_2} = (2,0,1)$, соответствующие собственному значению $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, линейно независимы, но ортогональными не являются.

г) Построим ортонормированную пару собственных векторов, соответствующую собственному значению $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, методом ортогонализации Грама–Шмидта:

1) $\boldsymbol{g}_1 = \boldsymbol{a_1} = (-2,1,0)$, $\boldsymbol{f_1} = \boldsymbol{g}_1 / \|\boldsymbol{g}_1\| = (-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0)$;

2) $(\boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{f_1}) = -\frac{4}{\sqrt{5}}$, $\boldsymbol{g}_2 = \boldsymbol{a_2} - (\boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{f_1}) \cdot \boldsymbol{f_1} = \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 1\right)$, $\boldsymbol{f_2} = \boldsymbol{g}_2 / \|\boldsymbol{g}_2\| = \left(\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$.

Найденные векторы $\boldsymbol{f_1} = (-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0)$, $\boldsymbol{f_2} = \left(\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$, $\boldsymbol{f_3} = (-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ образуют ортонормированный базис из собственных векторов. Матрица линейного оператора в этом базисе имеет вид $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$.

д) Заметим, что мы получили координаты векторов нового базиса $\boldsymbol{f}$ в старом базисе $\boldsymbol{e}$. Таким образом, матрица перехода от базиса $\boldsymbol{e}$ к базису $\boldsymbol{f}$ имеет вид $U = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$. Поскольку U является матрицей перехода от ортонормированного базиса к ортонормированному базису, то матрица U является ортогональной, и справедливо равенство $A_f = U^{-1}AU = U^T AU$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Для данного оператора $\boldsymbol{A}$ в евклидовом пространстве L найти сопряженный оператор $\boldsymbol{A}^*$.

1) $L = V_2$, $\boldsymbol{A}$ – оператор поворота на угол φ.

2) $L = C[a,b]$, $\boldsymbol{A}(f(x)) = f(x)p(x)$, где $p(x)$ – фиксированная функция из L.

3) $L = \{f(x) \in C^2[a;b] : f(a) = f(b) = 0\}$, где $C^2[a,b]$ – пространство дважды непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[a,b]$, $\boldsymbol{A}$ – оператор второй производной.

2. Пусть $\boldsymbol{A}$ – кососимметрический оператор в евклидовом пространстве, т.е. $\boldsymbol{A}^* = -\boldsymbol{A}$. Доказать, что для любого вектора $\boldsymbol{x}$ имеет место равенство $(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{x}) = 0$.

3. Найти все симметрические ортогональные матрицы размера 2×2.

Указание. Общий вид симметрической матрицы размера 2×2: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.

Из ортогональности получаем $A^2 = E$. Далее нужно составить и исследовать систему уравнений с переменными a, b и c.

4. Доказать, что если λ является собственным значением ортогонального оператора, то $|\lambda| = 1$.

5. Привести матрицу линейного самосопряженного оператора к диагональному виду ортогональным преобразованием. Указать матрицу перехода. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -6 \\ -3 & -6 & 8 \end{pmatrix}$.

Глава V. Квадратичные формы

5.1. Определение квадратичной формы, матрица квадратичной формы, преобразование матрицы квадратичной формы при переходе к новому базису

Определение. ***Квадратичной формой*** называется однородный многочлен второй степени от n переменных с действительными коэффициентами $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$, где $a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j = 1,2,...,n$.

Пример. $f(x_1, x_2) = 8x_1^2 - 3x_1x_2 + 6x_2^2$ – квадратичная форма ($n = 2$).

Замечание. Учитывая, что $a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j = 1,2,...,n$, квадратичную форму можно записать в виде $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum\limits_{1\le i<j\le n} a_{ij} x_i x_j$.

Определение. Симметрическая матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$, составленная из коэффициентов квадратичной формы, называется ***матрицей квадратичной формы***.

Утверждение. Квадратичную форму можно записать в матричном виде: $f(x_1,x_2,...,x_n)=X^T A X$, где $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ – столбец переменных, A – матрица квадратичной формы.

Задача 1. Записать квадратичную форму в матричном виде: $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2+4x_3^2+6x_1x_2-8x_2x_3$.

<u>Решение</u>. Учитывая, что a_{ii} – это коэффициенты при x_i^2, $i=1,2,3$, $a_{ij}+a_{ji}=2a_{ij}=2a_{ji}$ – коэффициенты при x_ix_j, $1\le i<j\le 3$, получим матрицу квадратичной формы $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$.

$$f(x_1,x_2,x_3)=X^T A X=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Зная матрицу квадратичной формы $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, записать квадратичную форму в виде многочлена.

<u>Решение.</u> $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+4x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3-2x_2x_3$.

Замечание. Пусть L – n-мерное линейное пространство. ***Квадратичную форму можно трактовать как отображение*** $f: L\to R$**,** сопоставляющее каждому элементу $\boldsymbol{x}\in L$ с координатами $(x_1,x_2,...,x_n)$ в некотором базисе $\boldsymbol{e}$ действительное число $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$: $f(\boldsymbol{x})=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$. Тогда матрица коэффициентов квадратичной формы называется матрицей квадратичной формы в базисе $\boldsymbol{e}$ и обозначается A_e.

Утверждение. При переходе от базиса $\boldsymbol{e}$ к базису $\boldsymbol{f}$ ***матрица квадратичной формы меняется по закону***

$$A_f=T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}}^T\cdot A_e\cdot T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}}\text{,}$$

где $T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}}$ – матрица перехода от базиса $\boldsymbol{e}$ к базису $\boldsymbol{f}$.

Действительно, пусть X – столбец координат вектора $\boldsymbol{x}\in L$ в базисе $\boldsymbol{e}$, Y – столбец координат вектора $\boldsymbol{x}\in L$ в базисе $\boldsymbol{f}$. Координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисах $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{f}$ связаны между собой соотношением $X=T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}}\cdot Y$. Запишем квадратичную форму в матричном виде:

$f(\boldsymbol{x}) = X^T A_e X = \left(T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}} \cdot Y\right)^T \cdot A_e \cdot (T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}} \cdot Y) = Y^T \cdot \left(T^T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}} \cdot A_e \cdot T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}}\right) \cdot Y = Y^T A_f Y$.

В результате получим квадратичную форму с матрицей $A_f = T^T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}} \cdot A_e \cdot T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}}$.

Замечание. Изменение базиса в линейном пространстве L приводит к линейной замене переменных $X = T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}} \cdot Y$ в квадратичной форме.

Задача 1. Найти квадратичную форму, полученную из $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2$ невырожденным преобразованием переменных: $\begin{cases} x_1 = 2y_1 - 3y_2 \\ x_2 = y_1 + y_2 \end{cases}$.

<u>I способ.</u> Сделав замену переменных в квадратичной форме, получим: $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2) = (2y_1 - 3y_2)^2 - 4(2y_1 - 3y_2)(y_1 + y_2) + 5(y_1 + y_2)^2 =$
$= y_1^2 + 2y_1y_2 + 26y_2^2$.

<u>II способ.</u> $A_e = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ – матрица квадратичной формы в некотором базисе $\boldsymbol{e}$. Запишем невырожденное преобразование переменных в матричной форме: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Матрицу $U = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ можем трактовать, как матрицу перехода от старого базиса к новому. Тогда $A_f = U^T A_e U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 26 \end{pmatrix}$.
Зная матрицу квадратичной формы, запишем квадратичную форму в виде многочлена $f(\boldsymbol{x}) = f(y_1, y_2) = y_1^2 + 2y_1y_2 + 26y_2^2$.

Задача 2. Написать квадратичную форму $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2$ в новом базисе $\boldsymbol{f_1} = (1, 3)$, $\boldsymbol{f_2} = (-1, 2)$.

<u>Решение.</u> $A_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ – матрица квадратичной формы в исходном базисе $\boldsymbol{e}$.

$T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ – матрица перехода от базиса $\boldsymbol{e}$ к базису $\boldsymbol{f}$. При переходе от базиса $\boldsymbol{e}$ к базису $\boldsymbol{f}$ матрица квадратичной формы меняется по закону $A_f = T^T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}} \cdot A_e \cdot T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 & 9 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$. Квадратичная форма в новом базисе имеет вид $f(\boldsymbol{x}) = f(y_1, y_2) = 31y_1^2 + 18y_1y_2 + y_2^2$.

5.2. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Закон инерции квадратичных форм

Определение. Квадратичная форма $f(x_1,x_2,...,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2$, содержащая только квадраты переменных, называется ***квадратичной формой канонического вида.*** Коэффициенты a_{ii}, $i=1,2,...,n$, квадратичной формы канонического вида называются ***каноническими коэффициентами***.

Замечание. Матрица квадратичной формы канонического вида является диагональной.

Теорема. Для любой квадратичной формы существует базис, в котором она имеет канонический вид.

Определение. Базис, в котором квадратичная форма имеет канонический вид, называется ***каноническим базисом.***

Рассмотрим методы приведения квадратичной формы к каноническому виду: метод Лагранжа и метод ортогональных преобразований.

I. Метод Лагранжа.

Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду состоит в последовательном выделении полных квадратов переменных. Коротко опишем этот метод. Если $a_{11}\neq 0$, то вынесем a_{11} за скобку, в скобке соберем все слагаемые, содержащие x_1, и дополним полученное выражение до полного квадрата. В результате получим

$f(x_1,x_2,...,x_n)=a_{11}\cdot\left(x_1+\sum\limits_{j=2}^{n} b_j x_j\right)^2+f_1(x_2,...,x_n)$, где $f_1(x_2,...,x_n)$– квадратичная форма, не содержащая переменную x_1. Выполнив линейную замену $y_1=x_1+\sum\limits_{j=2}^{n} b_j x_j$, получим $f(x_1,x_2,...,x_n)=a_{11}\cdot y_1^2+f_1(x_2,...,x_n)$. С квадратичной формой $f_1(x_2,...,x_n)$ поступим аналогично. Проиллюстрируем этот метод на конкретном примере.

Задача. Привести квадратичную форму $f(\boldsymbol{x})=f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_3^2-3x_1x_2+4x_1x_3+2x_2x_3$ к каноническому виду методом Лагранжа.

<u>Решение.</u> Поскольку $a_{11}=1\neq 0$, соберем слагаемые, содержащие x_1, и дополним полученное выражение до полного квадрата:

$$x_1^2-3x_1x_2+4x_1x_3=x_1^2+2x_1(-\tfrac{3}{2}x_2+2x_3)+(-\tfrac{3}{2}x_2+2x_3)^2-(-\tfrac{3}{2}x_2+2x_3)^2=$$

$$=(x_1-\tfrac{3}{2}x_2+2x_3)^2-(\tfrac{9}{4}x_2^2-6x_2x_3+4x_3^2)=y_1^2-\tfrac{9}{4}x_2^2+6x_2x_3-4x_3^2,$$

где $y_1=x_1-\frac{3}{2}x_2+2x_3$.

Итак, $f(\boldsymbol{x}) = y_1^2 - \frac{9}{4}x_2^2 + 6x_2x_3 - 4x_3^2 + x_3^2 + 2x_2x_3 = y_1^2 - \frac{9}{4}x_2^2 - 3x_3^2 + 8x_2x_3$.

Поскольку коэффициент при x_2^2 не равен нулю, вынесем этот коэффициент за скобку, в скобке соберем все слагаемые, содержащие x_2, и дополним полученное выражение до полного квадрата:

$$-\tfrac{9}{4}x_2^2 + 8x_2x_3 = -\tfrac{9}{4}(x_2^2 - \tfrac{32}{9}x_2x_3) = -\tfrac{9}{4}(x_2^2 - 2x_2 \cdot \tfrac{16}{9}x_3 + (\tfrac{16}{9}x_3)^2 - (\tfrac{16}{9}x_3)^2) =$$
$$= -\tfrac{9}{4}(x_2 - \tfrac{16}{9}x_3)^2 + \tfrac{64}{9}x_3^2 = -\tfrac{9}{4}y_2^2 + \tfrac{64}{9}x_3^2, \text{ где } y_2 = x_2 - \tfrac{16}{9}x_3.$$

Итак, $f(\boldsymbol{x}) = y_1^2 - \frac{9}{4}y_2^2 + \frac{64}{9}x_3^2 - 3x_3^2 = y_1^2 - \frac{9}{4}y_2^2 + \frac{37}{9}x_3^2 = y_1^2 - \frac{9}{4}y_2^2 + \frac{37}{9}y_3^2$, где $y_1 = x_1 - \frac{3}{2}x_2 + 2x_3$, $y_2 = x_2 - \frac{16}{9}x_3$, $y_3 = x_3$. Найдем матрицу перехода от старого базиса к новому. Для этого выразим переменные x_1, x_2, x_3 через y_1, y_2, y_3: $\begin{cases} x_1 = y_1 + \frac{3}{2}y_2 + \frac{2}{3}y_3 \\ x_2 = y_2 + \frac{16}{9}y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$. Итак, $X = UY$, где $U = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{16}{9} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица перехода от старого базиса $\boldsymbol{e}$ к новому базису $\boldsymbol{f}$. Учитывая, что матрица перехода состоит из координат векторов нового базиса в старом, записанных по столбцам, получим координаты векторов нового базиса $\boldsymbol{f_1} = (1,0,0)$, $\boldsymbol{f_2} = \left(\frac{3}{2},1,0\right)$, $\boldsymbol{f_3} = \left(\frac{2}{3},\frac{16}{9},1\right)$.

Окончательно получим: $f(\boldsymbol{x}) = y_1^2 - \frac{9}{4}y_2^2 + \frac{37}{9}y_3^2$. Указанный канонический вид квадратичная форма имеет в каноническом базисе $\boldsymbol{f_1} = \boldsymbol{e_1}$, $\boldsymbol{f_2} = \frac{3}{2}\boldsymbol{e_1} + \boldsymbol{e_2}$, $\boldsymbol{f_3} = \frac{2}{3}\boldsymbol{e_1} + \frac{16}{9}\boldsymbol{e_2} + \boldsymbol{e_3}$.

Замечание 1. Если коэффициент $a_{11} = 0$, т.е. нет слагаемого x_1^2, но отличен от нуля коэффициент при квадрате какой-либо другой переменной, то надо начинать выделение полного квадрата с этой переменной.

Замечание 2. Если все коэффициенты при квадратах переменных равны нулю, то сначала надо выполнить промежуточную замену переменных. Пусть, например, $a_{12} \neq 0$, т.е. присутствует слагаемое $2a_{12}x_1x_2$. Сделаем линейную замену переменных: $x_1 = x_1' + x_2'$, $x_2 = x_1' - x_2'$, $x_i = x_i'$, $i = 3,4,...,n$, тогда $2a_{12}x_1x_2 = 2a_{12} \cdot (x_1' + x_2')(x_1' - x_2') = 2a_{12}\left((x_1')^2 - (x_2')^2\right)$. После замены переменных получим квадратичную форму, у которой коэффициент при $(x_1')^2$ отличен от нуля.

II. Метод ортогонального преобразования.

Пусть E – n-мерное евклидово пространство. При переходе от базиса $\boldsymbol{e}$ к базису $\boldsymbol{f}$ матрица квадратичной формы меняется по закону $A_f = T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}}^T \cdot A_e \cdot T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}}$, где $T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}}$ – матрица перехода от базиса $\boldsymbol{e}$ к базису $\boldsymbol{f}$ (гл. V, п. 5.1). Поскольку матрица квадратичной формы является симметрической, она может быть приведена ортогональным преобразованием к диагональному виду, т.е. для матрицы A_e существует такая ортогональная матрица U ($U^{-1}=U^T$), что $U^T A_e U = \Lambda$. Здесь Λ – диагональная матрица, диагональными элементами которой являются собственные значения матрицы A_e, повторяющиеся столько раз, какова их кратность. При этом матрица U является матрицей перехода из старого ортонормированного базиса к новому ортонормированному базису, состоящему из собственных векторов матрицы A_e (гл. IV, п. 4.3).

Квадратичная форма с матрицей $A_f = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$ имеет канонический вид: $f(\boldsymbol{x}) = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$. Ортонормированный базис $\boldsymbol{f}$, состоящий из собственных векторов матрицы A_e, является каноническим базисом квадратичной формы.

Задача 1. Найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$ к каноническому виду. Написать канонический вид.

Решение. а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица квадратичной формы в исходном ортонормированном базисе $\boldsymbol{e}$. Найдем собственные значения матрицы A. Для этого решим характеристическое уравнение

$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = 0$. $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$ – корни характеристического уравнения. $\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ – матрица квадратичной формы в новом базисе $\boldsymbol{f}$ (ортонормированном базисе из собственных векторов матрицы A). В базисе $\boldsymbol{f}$ квадратичная форма имеет канонический вид $f(\boldsymbol{x}) = f(y_1, y_2) = -y_1^2 + 3y_2^2$.

б) Чтобы построить базис из собственных векторов, надо для каждого собственного значения λ решить СЛАУ $(A - \lambda E) \cdot X = O$. Координаты собственного вектора, отвечающего собственному значению $\lambda_1 = -1$, найдем из СЛАУ $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Общее решение системы имеет вид: $X = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\forall \alpha$. Вектор $\boldsymbol{a_1} = (1, -1)$ является собственным вектором матрицы A, отвечающим собственному значению $\lambda_1 = -1$. Координаты собственного вектора, отвечающего собственному значению $\lambda_2 = 3$, найдем из СЛАУ $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Общее решение системы имеет вид: $X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\forall \alpha$. Вектор $\boldsymbol{a_2} = (1, 1)$ является собственным вектором матрицы A, отвечающим собственному значению $\lambda_2 = 3$. Нормируя собственные векторы, получим ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов матрицы A: $\boldsymbol{f_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\boldsymbol{f_2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, в котором квадратичная форма имеет указанный канонический вид. Матрица $U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ является ортогональной матрицей перехода от базиса $\boldsymbol{e}$ к базису $\boldsymbol{f}$, причем $\Lambda = U^T A\ U$. Изменение базиса привело к линейной замене переменных $X = U \cdot Y$ в квадратичной форме: $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 \\ x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 \end{cases}$.

Задача 2. Найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму к каноническому виду. Написать канонический вид. $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, x_3) = 11x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 - 20x_2x_3$.

Решение. а) $A = \begin{pmatrix} 11 & 8 & 2 \\ 8 & 5 & -10 \\ 2 & -10 & 2 \end{pmatrix}$ – матрица квадратичной формы в исходном ортонормированном базисе $\boldsymbol{e}$. Найдем собственные значения матрицы A. Для этого решим характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 11-\lambda & 8 & 2 \\ 8 & 5-\lambda & -10 \\ 2 & -10 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$. $\lambda_1 = 18$, $\lambda_2 = 9$, $\lambda_3 = -9$ – корни характеристического уравнения. $\Lambda = \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$ – матрица квадратичной формы в новом базисе $\boldsymbol{f}$ (в ортонормированном базисе из собственных векторов матрицы A). В базисе $\boldsymbol{f}$ квадратичная форма имеет канонический вид $f(\boldsymbol{x}) = f(y_1, y_2, y_3) = 18y_1^2 + 9y_2^2 - 9y_3^2$.

б) Чтобы построить базис из собственных векторов, надо для каждого собственного значения λ решить СЛАУ $(A - \lambda E) \cdot X = O$. Координаты собственного вектора, отвечающего собственному значению $\lambda_1 = 18$, найдем из СЛАУ: $\begin{pmatrix} -7 & 8 & 2 \\ 8 & -13 & -10 \\ 2 & -10 & -16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Общее решение системы имеет вид: $X = \begin{pmatrix} -2\alpha \\ -2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\forall \alpha$. Вектор $\boldsymbol{a_1} = (-2,-2,1)$ является собственным вектором матрицы A, отвечающим собственному значению $\lambda_1 = 18$. Координаты собственного вектора, отвечающего собственному значению $\lambda_2 = 9$, найдем из СЛАУ $\begin{pmatrix} 2 & 8 & 2 \\ 8 & -4 & -10 \\ 2 & -10 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Общее решение системы имеет вид: $X = \begin{pmatrix} -2\alpha \\ \alpha \\ -2\alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\forall \alpha$. Вектор $\boldsymbol{a_2} = (-2,1,-2)$ является собственным вектором матрицы A, отвечающим собственному значению $\lambda_2 = 9$. Аналогично найдем координаты собственного вектора, отвечающего собственному значению $\lambda_3 = -9$, $\boldsymbol{a}_3 = \left(-\frac{1}{2}, 1, 1\right)$. Нормируя собственные векторы, получим ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов матрицы A: $\boldsymbol{f_1} = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $\boldsymbol{f_2} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $\boldsymbol{f_3} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$. В этом базисе квадратичная форма имеет указанный канонический вид. Матрица $U = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ является ортогональной матрицей перехода от базиса $\boldsymbol{e}$ к базису $\boldsymbol{f}$, причем $\Lambda = U^T A\ U$. Изменение базиса привело к линейной замене переменных $X = U \cdot Y$ в квадратичной форме:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{2}{3} y_1 - \frac{2}{3} y_2 - \frac{1}{3} y_3 \\ x_2 = -\frac{2}{3} y_1 + \frac{1}{3} y_2 + \frac{2}{3} y_3 \\ x_3 = \frac{1}{3} y_1 - \frac{2}{3} y_2 + \frac{2}{3} y_3 \end{cases}.$$

Замечание. Ни канонический базис, ни канонический вид квадратичной формы не определены однозначно. Возникает вопрос: что общего у различных канонических видов одной и той же квадратичной формы?

Определение. Ранг матрицы квадратичной формы в произвольном базисе называется ***рангом квадратичной формы***.

Теорема. Ранг квадратичной формы не меняется при невырожденных линейных преобразованиях и равен

1) числу отличных от нуля канонических коэффициентов;

2) количеству ненулевых собственных значений матрицы квадратичной формы в любом базисе (с учетом их кратности).

Теорема (закон инерции). Число слагаемых с положительными (отрицательными) каноническими коэффициентами в каноническом виде квадратичной формы не зависит от способа приведения квадратичной формы к каноническому виду.

5.3. Знакоопределенные квадратичные формы

Определение. Квадратичная форма называется ***положительно определенной*** (***отрицательно определенной***), если для любого ненулевого элемента $\boldsymbol{x} = (x_1,...,x_n) \in R^n$ выполняется неравенство $f(\boldsymbol{x}) > 0$ (соответственно $f(\boldsymbol{x}) < 0$).

Определение. Квадратичная форма называется ***неотрицательно определенной*** (***неположительно определенной***), если для любого ненулевого элемента $\boldsymbol{x} = (x_1,...,x_n) \in R^n$ выполняется неравенство $f(\boldsymbol{x}) \geq 0$ (соответственно $f(\boldsymbol{x}) \leq 0$), и существует такой ненулевой элемент $\boldsymbol{x} = (x_1,...,x_n) \in R^n$, для которого $f(\boldsymbol{x}) = 0$.

Определение. Квадратичная форма называется ***знакопеременной***, если существуют такие элементы $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in R^n$, что $f(\boldsymbol{x}) > 0$, а $f(\boldsymbol{y}) < 0$.

Примеры. Квадратичная форма $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + x_2^2$ является положительно определенной; квадратичная форма $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2) = 3x_1^2$ является неотрицательно определенной, т.к. существует ненулевой элемент $\boldsymbol{x} = (0,1) \in R^2$: $f(\boldsymbol{x}) = 0$; квадратичная форма $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2) = 3x_1^2 - x_2^2$ знакопеременная, т.к. $f(\boldsymbol{x}) = f(1,0) = 3 > 0$, а $f(\boldsymbol{y}) = f(0,1) = -1 < 0$.

Утверждение. Пусть A – матрица квадратичной формы в некотором базисе, λ_i, $i = 1,2,...,n$, собственные значения матрицы A.

1) Квадратичная форма $f(\boldsymbol{x})$ является положительно (отрицательно) определенной тогда и только тогда, когда $\lambda_i > 0 \ \forall i = 1,2,...,n$ (соответственно $\lambda_i < 0 \ \forall i = 1,2,...,n$).

2) Квадратичная форма $f(\boldsymbol{x})$ является неотрицательно (неположительно) определенной тогда и только тогда, когда $\lambda_i \geq 0 \ \forall i = 1,2,...,n$ (соответственно $\lambda_i \leq 0 \ \forall i = 1,2,...,n$) и хотя бы одно собственное значение равно нулю.

3) Квадратичная форма $f(\boldsymbol{x})$ является знакопеременной тогда и только тогда, когда существуют собственные значения разных знаков.

Замечание. Невырожденная квадратичная форма ($\det A \neq 0$) может быть либо положительно определенной, либо отрицательно определенной, либо знакопеременной.

Действительно, если $\det A \neq 0$, то $\lambda = 0$ не может быть корнем характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = 0$, следовательно, $\lambda = 0$ не может быть собственным значением матрицы A.

Тип квадратичной формы можно определить, не вычисляя собственных значений ее матрицы. Пусть A – матрица квадратичной формы размера $n \times n$ в произвольном базисе. Рассмотрим угловые миноры матрицы A: $\Delta_1 = a_{11}$,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Теорема (критерий Сильвестра). Для того чтобы квадратичная форма от n переменных была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все угловые миноры ее матрицы в произвольном базисе были положительными: $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0, \ldots, \ \Delta_n > 0$.

Следствие из критерия Сильвестра. Для того чтобы квадратичная форма от n переменных была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы знаки угловых миноров ее матрицы в произвольном базисе чередовались, начиная с минуса: $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0, \ldots,$ $(-1)^n \Delta_n > 0$.

Задача 1. Исследовать знакоопределенность квадратичной формы $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2) = x_1^2 + 10x_1x_2 + 26x_2^2$.

Решение. Рассмотрим матрицу квадратичной формы и найдем ее угловые миноры: $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 26 \end{pmatrix}$, $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 26 \end{vmatrix} = 1$. Поскольку все угловые миноры матрицы A положительные, по критерию Сильвестра квадратичная форма является положительно определенной.

Задача 2. Исследовать знакоопределенность квадратичной формы $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, x_3) = -11x_1^2 - 6x_2^2 - 6x_3^2 + 12x_1x_2 - 12x_1x_3 + 6x_2x_3$.

Решение. Рассмотрим матрицу квадратичной формы и найдем ее угловые миноры: $A = \begin{pmatrix} -11 & 6 & -6 \\ 6 & -6 & 3 \\ -6 & 3 & -6 \end{pmatrix}$, $\Delta_1 = -11 < 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -11 & 6 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} = 30 > 0$,

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -11 & 6 & -6 \\ 6 & -6 & 3 \\ -6 & 3 & -6 \end{vmatrix} = -81 < 0$. Поскольку знаки угловых миноров чередуются, начиная с минуса, квадратичная форма является отрицательно определенной по следствию из критерия Сильвестра.

Задача 3. Исследовать знакоопределенность квадратичной формы в зависимости от значения параметра λ: $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2) = 2\lambda x_1^2 + (2\lambda + 8)x_1x_2 + (\lambda + 1)x_2^2$.

Решение. Рассмотрим матрицу квадратичной формы и найдем ее угловые миноры: $A=\begin{pmatrix}2\lambda & \lambda+4\\ \lambda+4 & \lambda+1\end{pmatrix}$, $\Delta_1=2\lambda$, $\Delta_2=\begin{vmatrix}2\lambda & \lambda+4\\ \lambda+4 & \lambda+1\end{vmatrix}=\lambda^2-6\lambda-16$.

а) Найдем все λ, при которых квадратичная форма является невырожденной. $\det A\neq 0$ при всех $\lambda\neq 8$, $\lambda\neq -2$. Применяя критерий Сильвестра и следствие из него, получим, что квадратичная форма является положительно определенной, если $\begin{cases}\Delta_1=2\lambda>0\\ \Delta_2=\lambda^2-6\lambda-16>0\end{cases}$, т.е. при $\lambda\in(8,+\infty)$; отрицательно определенной, если $\begin{cases}\Delta_1=2\lambda<0\\ \Delta_2=\lambda^2-6\lambda-16>0\end{cases}$, т.е. при $\lambda\in(-\infty,-2)$. Невырожденная квадратичная форма может быть только либо положительно определенной, либо отрицательно определенной, либо знакопеременной. Поэтому при $\lambda\in(-2,8)$ квадратичная форма является знакопеременной.

б) При $\lambda=8$ и $\lambda=-2$ квадратичная форма является вырожденной. Рассмотрим квадратичную форму при $\lambda=8$:

$f(\boldsymbol{x})=f(x_1,x_2)=16x_1^2+24x_1x_2+9x_2^2=(4x_1+3x_2)^2\geq 0$. Квадратичная форма является неотрицательно определенной при $\lambda=8$, т.к. существует такой ненулевой элемент $\boldsymbol{x}=(3,-4)$: $f(\boldsymbol{x})=0$.

в) Рассмотрим квадратичную форму при $\lambda=-2$:

$f(\boldsymbol{x})=f(x_1,x_2)=-4x_1^2+4x_1x_2-x_2^2=-(2x_1-x_2)^2\leq 0$. Квадратичная форма является неположительно определенной при $\lambda=-2$, т.к. существует такой ненулевой элемент $\boldsymbol{x}=(1,2)$: $f(\boldsymbol{x})=0$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Исследовать знакоопределенность квадратичной формы в зависимости от значения параметра α.

1) $\alpha x^2+12xy+(\alpha-5)y^2$.

2) $(\alpha-3)x^2+4\alpha xy+\alpha y^2$.

3) $\alpha x^2+\alpha y^2+(\alpha-6)z^2+4xy-8xz+8yz$.

2. Даны два многочлена p_1 и p_2 от переменных x_1, x_2 и x_3. Возможно ли равенство $p_1^2+p_2^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2$?

Указание. Равенство $p_1^2+p_2^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2$ возможно только в случае, если многочлены p_1 и p_2 имеют первую степень и нулевой свободный член. Далее нужно применить закон инерции.

3. Доказать, что если квадратичная форма распадается в произведение двух линейных сомножителей, то ее ранг не превосходит 2.

Указание. Сделаем замену переменных, при которой каждый из этих двух сомножителей примем за новую переменную. Тогда квадратичная форма будет представлять собой произведение двух переменных.

4. Доказать, что в положительно определенной квадратичной форме все коэффициенты при квадратах переменных положительны. Является ли это условие достаточным для положительной определенности формы?

5. Сформулировать необходимое и достаточное условие, при котором квадратичные формы $f(\boldsymbol{x})$ и $-f(\boldsymbol{x})$ могут быть приведены к одному и тому же каноническому виду.

6. Доказать, что квадратичная форма является положительно определенной тогда и только тогда, когда все собственные значения ее матрицы положительны, и отрицательно определенной тогда и только тогда, когда все собственные значения ее матрицы отрицательны.

7. Привести квадратичную форму $-x^2+2y^2-z^2+4xy-2xz-4yz$ к каноническому виду а) методом Лагранжа; б) ортогональным преобразованием.

Глава VI. Приведение уравнений кривых и поверхностей второго порядка к каноническому виду

Рассмотрим n–мерное вещественное евклидово пространство R^n. Фиксируем в R^n ортонормированный базис $\boldsymbol{e}$. Координаты вектора $\boldsymbol{x}$ (точки $\boldsymbol{x}$) в этом базисе обозначим через $(x_1,x_2,...,x_n)$.

Рассмотрим геометрическое место точек $\boldsymbol{x}(x_1,x_2,...,x_n)\in R^n$, удовлетворяющих уравнению

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j+\sum_{i=1}^{n}b_ix_i+c=0. \tag{1}$$

Здесь c, a_{ij}, $i,j=1,2,...,n$, b_i, $i=1,2,...,n,$ – действительные коэффициенты, $a_{ij}=a_{ji}$ $\forall i,j=1,2,...,n$, среди коэффициентов a_{ij}, $i,j=1,2,...,n$ хотя бы один отличен от нуля.

Замечание 1. При $n=2$ уравнение (1) является уравнением кривой второго порядка на плоскости, при $n=3$ уравнение (1) является уравнением поверхности второго порядка в трехмерном пространстве.

Замечание 2. Слагаемое $\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$ будем называть ***группой старших членов*** уравнения (1), группу слагаемых $\sum_{i=1}^{n}b_ix_i+c$ будем называть ***линейной частью*** уравнения (1).

Замечание 3. Группа старших членов уравнения (1) является квадратичной формой $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ с матрицей $A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$, члены первого порядка образуют линейную форму $\sum_{i=1}^{n} b_i x_i$ с матрицей-строкой $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & ... & b_n \end{pmatrix}$. Уравнение (1) можно записать в матричном виде:

$$X^T A X + B X + c = 0, \tag{2}$$

где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ – матрица-столбец переменных.

Упростим уравнение (1). Для этого приведем квадратичную форму к каноническому виду. Существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов матрицы A, в котором квадратичная форма имеет канонический вид $f(\boldsymbol{x}) = \lambda_1 y_1^2 + ... + \lambda_n y_n^2$, где λ_i, $i = 1,2,...,n$, – собственные значения матрицы A, повторяющиеся столько раз, какова их кратность. Матрица перехода от старого ортонормированного базиса к новому ортонормированному базису U является ортогональной.

Сделаем замену переменных $X = UY$. Тогда уравнение (2) примет вид:
$(UY)^T \cdot A \cdot (UY) + B \cdot (UY) + c = 0 \iff Y^T \cdot \left(U^T A U\right) \cdot Y + (BU) \cdot Y + c = 0 \iff$
$Y^T \Lambda Y + DY + c = 0$, где $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}$, $D = B \cdot U$. Последнее уравнение можно записать в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 + \sum_{i=1}^{n} d_i y_i + c = 0. \tag{3}$$

Уравнение (3) проще уравнения (1), т. к. оно не содержит слагаемых вида $y_i y_j$, при $i \neq j$. Дальнейший анализ уравнения (3) при $n = 2$ и $n = 3$ проводится по стандартной схеме, рассмотренной в курсе аналитической геометрии.

Замечание. В двумерном случае ($n = 2$) при дополнительном условии $\det U = 1$ преобразование $X = UY$ является поворотом системы координат вокруг неподвижного начала системы координат. В трехмерном случае ($n = 3$) при дополнительном условии $\det U = 1$ преобразование $X = UY$

является поворотом системы координат вокруг некоторой оси, проходящей через начало координат.

Задача 1. Исследовать уравнение и построить кривую $9x^2+4xy+6y^2-16x-8y-2=0$.

Решение. Рассмотрим матрицы квадратичной и линейной формы: $A=\begin{pmatrix}9&2\\2&6\end{pmatrix}$, $B=(-16\ \ -8)$. Уравнение кривой второго порядка можно записать в матричном виде: $X^TAX+BX-2=0$, где $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ – матрица-столбец переменных. Методом ортогонального преобразования приведем квадратичную форму X^TAX к каноническому виду. Для этого найдем собственные значения и соответствующие им собственные векторы матрицы A.

а) Найдем собственные значения матрицы A. Для этого решим характеристическое уравнение $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}9-\lambda&2\\2&6-\lambda\end{vmatrix}=0$. $\lambda_1=10$, $\lambda_2=5$ – корни характеристического уравнения. $\Lambda=\begin{pmatrix}10&0\\0&5\end{pmatrix}$ – матрица квадратичной формы в новом базисе $\boldsymbol{f}$ (в ортонормированном базисе из собственных векторов матрицы A).

б) Найдем собственные векторы матрицы A. Координаты собственного вектора, отвечающего собственному значению $\lambda_1=10$, найдем из СЛАУ $(A-\lambda E)\cdot X=O$ при $\lambda=10$: $\begin{pmatrix}-1&2\\2&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. СЛАУ равносильна уравнению $-x_1+2x_2=0$. Вектор $\boldsymbol{a_1}=(2,1)$ является собственным вектором матрицы A, отвечающим собственному значению $\lambda_1=10$. Координаты собственного вектора, отвечающего собственному значению $\lambda_2=5$, найдем из СЛАУ $\begin{pmatrix}4&2\\2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, которая равносильна уравнению $2x_1+x_2=0$. Вектор $\boldsymbol{a_2}=(-1,2)$ является собственным вектором матрицы A, отвечающим собственному значению $\lambda_2=5$. Нормируя собственные векторы, получим ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов матрицы A: $\boldsymbol{f_1}=\left(\frac{2}{\sqrt5},\ \frac{1}{\sqrt5}\right)$, $\boldsymbol{f_2}=\left(-\frac{1}{\sqrt5},\ \frac{2}{\sqrt5}\right)$. В базисе $\boldsymbol{f}$ квадратичная форма имеет канонический вид. Матрица $U=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt5}&-\frac{1}{\sqrt5}\\\frac{1}{\sqrt5}&\frac{2}{\sqrt5}\end{pmatrix}$ является ортогональной матрицей перехода от старого ортонормированного базиса $\boldsymbol{e}$ к новому ортонормированному базису $\boldsymbol{f}$, состоящему из собственных векторов матрицы A, $\det U = 1$.

в) Изменение базиса привело к линейной замене переменных $X = U \cdot X'$: $\begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt5}x' - \frac{1}{\sqrt5}y' \\ y = \frac{1}{\sqrt5}x' + \frac{2}{\sqrt5}y' \end{cases}$. В результате получим уравнение $(X')^T \Lambda X' + D X' - 2 = 0$,

где $\Lambda = U^T A U = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $BU = D = (-8\sqrt5 \quad 0)$, $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Последнее уравнение можно записать в следующем виде: $10(x')^2 + 5(y')^2 - 8\sqrt5\, x' - 2 = 0$. Выделяя в уравнении полный квадрат $10(x')^2 - 8\sqrt5\, x' = 10\left(x' - \frac{2}{\sqrt5}\right)^2 - 8$, придем к уравнению $10\left(x' - \frac{2}{\sqrt5}\right)^2 + 5(y')^2 - 10 = 0$. Выполнив замену переменных $\begin{cases} x'' = x' - \frac{2}{\sqrt5} \\ y'' = y' \end{cases}$, получим уравнение $10(x'')^2 + 5(y'')^2 = 10$, которое легко преобразуется к каноническому уравнению эллипса $\frac{(x'')^2}{1^2} + \frac{(y'')^2}{(\sqrt2)^2} = 1$.

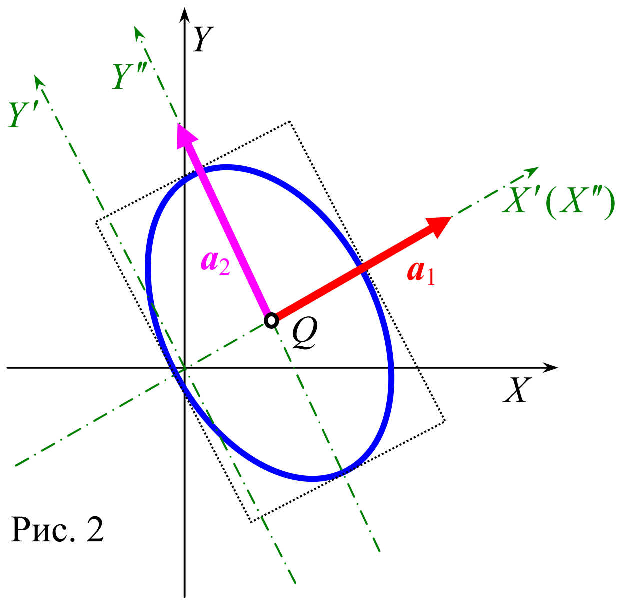

Рис. 2

Чтобы построить эллипс, заданный уравнением $9x^2 + 4xy + 6y^2 - 16x - 8y - 2 = 0$, надо изобразить исходную систему координат XOY; в этой системе координат отложить от точки O собственные векторы $\boldsymbol{a_1}$ и $\boldsymbol{a_2}$ и вдоль них направить координатные оси новой системы координат $X'OY'$. В системе координат $X'OY'$ надо отметить точку $Q(\frac{2}{\sqrt5},0)$, являющуюся началом еще одной системы координат $X''QY''$ с осями, параллельными осям OX' и OY'. В системе координат $X''QY''$ строим эллипс с полуосями $a = 1$, $b = \sqrt2$ (см. рис. 2).

Замечание 1. Матрица $U = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt5} & -\frac{1}{\sqrt5} \\ \frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$, где $\varphi = \arccos(\frac{2}{\sqrt5})$, является матрицей линейного оператора поворота вектора, лежащего на плоскости, на угол φ против часовой стрелки. Таким образом, ортонормированный базис $\boldsymbol{f}$, состоящий из собственных векторов матрицы A, получается путем поворота базиса $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ на угол φ вокруг точки O – начала координат.

Замечание 2. Соотношения $\begin{cases} x'' = x' - \frac{2}{\sqrt{5}} \\ y'' = y' \end{cases}$ определяют параллельный перенос системы координат на вектор $\boldsymbol{OQ} = (\frac{2}{\sqrt{5}}, 0)$. Зная координаты точки Q в системе координат $X'OY'$: $x' = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $y' = 0$, можно найти координаты точки Q в исходной системе координат: $x = \frac{4}{5}$, $y = \frac{2}{5}$.

Замечание 3. Подставляя $\begin{cases} x' = x'' + \frac{2}{\sqrt{5}} \\ y' = y'' \end{cases}$ в $\begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{5}} x' - \frac{1}{\sqrt{5}} y' \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}} x' + \frac{2}{\sqrt{5}} y' \end{cases}$, получим связь между новыми и старыми координатами $\begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{5}} x'' - \frac{1}{\sqrt{5}} y'' + \frac{4}{5} \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}} x'' + \frac{2}{\sqrt{5}} y'' + \frac{2}{5} \end{cases}$.

Задача 2. Привести к каноническому виду уравнение поверхности $x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz + 4xz + \sqrt{2}x - \sqrt{2}z - 3 = 0$.

Решение. Рассмотрим матрицы квадратичной и линейной формы: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = (\sqrt{2} \quad 0 \quad -\sqrt{2})$. Уравнение поверхности второго порядка можно записать в матричном виде: $X^T A X + B X - 3 = 0$, где $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ – матрица-столбец переменных. Методом ортогонального преобразования приведем квадратичную форму $X^T A X$ к каноническому виду. Для этого найдем собственные значения и соответствующие им собственные векторы матрицы A.

а) Найдем собственные значения матрицы A. Для этого решим характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$. $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 5$ – корни характеристического уравнения. $\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ – матрица квадратичной формы в новом базисе $\boldsymbol{f}$ (в ортонормированном базисе из собственных векторов матрицы A).

б) Найдем собственные векторы матрицы A. Координаты собственного вектора, отвечающего собственному значению $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, найдем из СЛАУ

$(A-\lambda E)\cdot X = O$ при $\lambda=-1$: $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ранг матрицы системы равен 1, поэтому ФСР системы состоит из $n-r=3-1=2$ решений. СЛАУ равносильна уравнению $x_1+x_2+x_3=0$. Векторы $\boldsymbol{a_1}=(-1,0,1)$ и $\boldsymbol{a_2}=(-1,1,0)$ являются линейно независимыми собственными векторами матрицы A, отвечающими собственному значению $\lambda_1=\lambda_2=-1$.

Аналогично найдем координаты собственного вектора матрицы A, отвечающего собственному значению $\lambda_3=5$. Получим $\boldsymbol{a_3}=(1,1,1)$.

в) Найденные собственные векторы $\boldsymbol{a_1}=(-1,0,1)$ и $\boldsymbol{a_2}=(-1,1,0)$ линейно независимы, но ортогональными не являются. Построим ортонормированную пару собственных векторов, соответствующую собственному значению $\lambda_1=\lambda_2=-1$, при помощи метода ортогонализации Грама-Шмидта:

1) $\boldsymbol{g}_1=\boldsymbol{a_1}=(-1,0,1)$, $\quad \boldsymbol{f_1}=\boldsymbol{g}_1/\|\boldsymbol{g}_1\|=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

2) $(\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{f_1})=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\quad \boldsymbol{g}_2=\boldsymbol{a_2}-(\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{f_1})\cdot\boldsymbol{f_1}=\left(-\frac{1}{2},\ 1,-\frac{1}{2}\right)$

$\boldsymbol{f_2}=\boldsymbol{g}_2/\|\boldsymbol{g}_2\|=\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

Найденные векторы $\boldsymbol{f_1}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $\boldsymbol{f_2}=\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ являются ортонормированными.

г) Нормируя вектор $\boldsymbol{a_3}=(1,1,1)$, получим ортонормированный базис из собственных векторов матрицы A: $\boldsymbol{f_1}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\boldsymbol{f_2}=\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $\boldsymbol{f_3}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. В базисе $\boldsymbol{f}$ квадратичная форма имеет канонический вид.

Матрица $U=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ является ортогональной матрицей перехода от старого ортонормированного базиса $\boldsymbol{e}$ к новому ортонормированному базису $\boldsymbol{f}$, состоящему из собственных векторов матрицы A, причем $\Lambda=U^{-1}AU=U^TAU$. Однако $\det U=-1$. Поменяем местами первый и второй столбцы матрицы U (т.е. поменяем местами два собственных вектора, отвечающих $\lambda_1=\lambda_2=-1$). Получим матрицу перехода с $\det U=1$:

$U=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$. Ортонормированный базис из собственных векторов матрицы A образуют векторы $\boldsymbol{f_1} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $\boldsymbol{f_2} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\boldsymbol{f_3} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

д) Изменение базиса привело к линейной замене переменных $X = U \cdot X'$: $\begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{6}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z' \\ y = \frac{2}{\sqrt{6}}x' + \frac{1}{\sqrt{3}}z' \\ z = -\frac{1}{\sqrt{6}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z' \end{cases}$. В результате получим уравнение $(X')^T \Lambda X' + D X' - 3 = 0$, где $\Lambda = U^T A U = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $BU = D = (0 \ -2 \ \ 0)$, $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. Последнее уравнение можно записать в следующем виде: $-(x')^2 - (y')^2 + 5(z')^2 - 2y' - 3 = 0$. Выделяя в уравнении полный квадрат $-(y')^2 - 2y' = -(y'+1)^2 + 1$, придем к уравнению $-(x')^2 - (y'+1)^2 + 5(z')^2 - 2 = 0$. Выполнив замену переменных $\begin{cases} x'' = x' \\ y'' = y' + 1 \\ z'' = z' \end{cases}$, получим уравнение $-(x'')^2 - (y'')^2 + 5(z'')^2 = 2$, которое легко преобразуется к каноническому уравнению двуполостного гиперболоида $\frac{(x'')^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{(y'')^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{(z'')^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)^2} = -1$.

Чтобы построить двуполостный гиперболоид, заданный уравнением $x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz + 4xz + \sqrt{2}x - \sqrt{2}z - 3 = 0$, надо изобразить исходную систему координат XYZ; в этой системе координат отложить от точки O собственные векторы $\boldsymbol{b_1}$, $\boldsymbol{b_2}$, $\boldsymbol{b_3}$ $\left(\boldsymbol{b_1} = (-1,2,-1),\ \boldsymbol{b_2} = (-1,0,1),\ \boldsymbol{b_3} = (1,1,1)\right)$ и вдоль них направить координатные оси новой системы координат $X'Y'Z'$. В системе координат $X'Y'Z'$ надо отметить точку $Q(0,-1,0)$, являющуюся началом еще одной системы координат $X''Y''Z''$ с осями, параллельными осям OX', OY', OZ'. В системе координат $X''Y''Z''$ строим двуполостный гиперболоид (см. рис. 3).

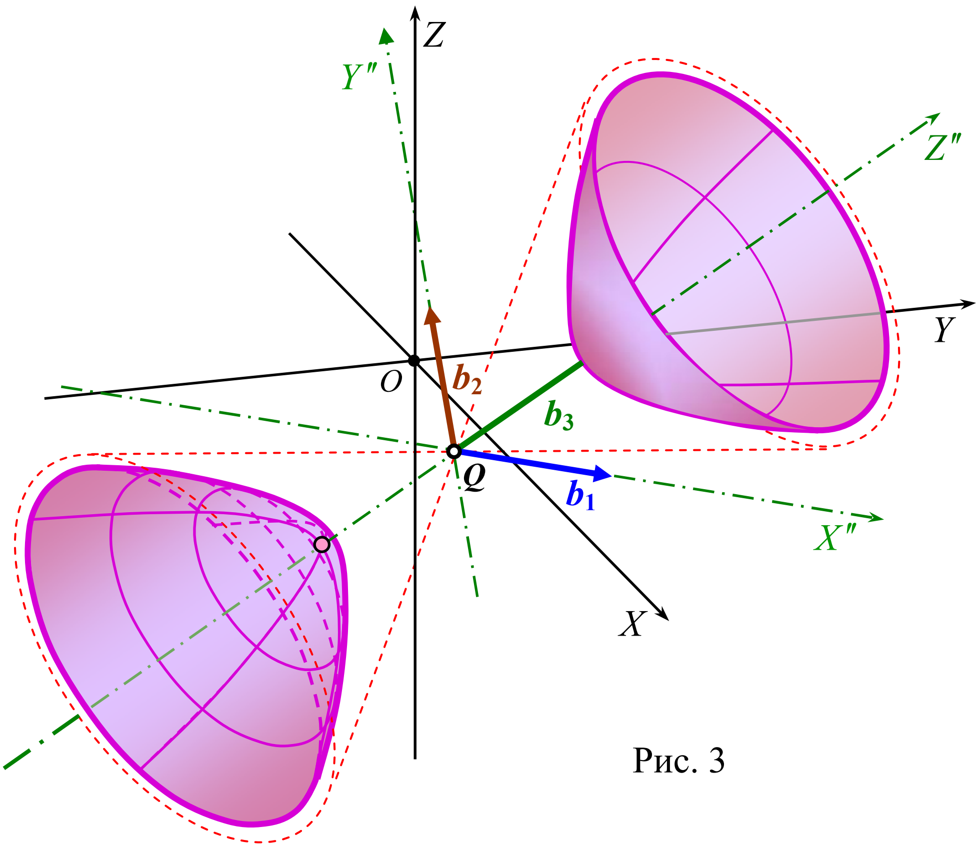

Рис. 3

Замечание 1. Соотношения $\begin{cases} x'' = x' \\ y'' = y' + 1 \\ z'' = z' \end{cases}$ определяют параллельный перенос системы координат на вектор $\boldsymbol{OQ} = (0, -1, 0)$. Зная координаты точки Q в системе координат $X'Y'Z'$: $x' = 0$, $y' = -1$, $z' = 0$, можно найти координаты точки Q в исходной системе координат: $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = 0$, $z = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Замечание 2. Подставляя $\begin{cases} x'' = x' \\ y'' = y' + 1 \\ z'' = z' \end{cases}$ в $\begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{6}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z' \\ y = \frac{2}{\sqrt{6}}x' + \frac{1}{\sqrt{3}}z' \\ z = -\frac{1}{\sqrt{6}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z' \end{cases}$, получим связь между новыми и старыми координатами

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{6}}x'' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'' + \frac{1}{\sqrt{3}}z'' + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{2}{\sqrt{6}}x'' + \frac{1}{\sqrt{3}}z''' \\ z = -\frac{1}{\sqrt{6}}x'' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'' + \frac{1}{\sqrt{3}}z'' - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}.$$

Задачи для самостоятельного решения.

Привести уравнение кривой к каноническому виду и построить кривую.

1) $9x^2 + 6xy + 17y^2 = 72$.

2) $x^2 - 8xy + 7y^2 = 36$.

Глава VII. Разбор типового расчета по линейной алгебре

Задача 1. Исследовать на линейную зависимость систему векторов: $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}$. $\boldsymbol{a_1} = (5,2,-1,3,4)$, $\boldsymbol{a_2} = (3,1,-2,3,5)$, $\boldsymbol{a_3} = (6,3,-2,4,7)$.

Решение. Из столбцов координат векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ составим матрицу $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. Вычислим ранг матрицы A методом элементарных преобразований строк. Поскольку ранг матрицы A равен трем и матрица состоит из трех столбцов, столбцы матрицы A линейно независимы, следовательно, система векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ линейно независима.

Задача 2. Рассматривая векторы $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$ как новый базис в R^3, вычислить: а) координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в исходном базисе $\boldsymbol{e}$, зная его координаты в новом базисе $\boldsymbol{f}$; б) координаты вектора $\boldsymbol{c}$ в новом базисе $\boldsymbol{f}$, зная его координаты в исходном базисе $\boldsymbol{e}$. $\boldsymbol{f_1} = (2,-1,1)$, $\boldsymbol{f_2} = (2,0,2)$, $\boldsymbol{f_3} = (3,0,1)$, $\boldsymbol{b} = (2,0,1)$, $\boldsymbol{c} = (9,-3,8)$.

Решение. а) Докажем, что векторы $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$ образуют базис в пространстве R^3. Из столбцов координат векторов составим матрицу $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Поскольку $\det A \neq 0$, столбцы матрицы A линейно независимы, следовательно, система векторов линейно независима. Поскольку количество линейно независимых векторов совпадает с размерностью пространства R^3, эти векторы образуют базис в пространстве R^3.

б) Данная матрица A и есть матрица перехода от базиса $\boldsymbol{e}$ к базису $\boldsymbol{f}$. $(2,0,1)$ – координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в базисе $\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3)$, (x_1, x_2, x_3) – координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в исходном базисе $\boldsymbol{e}$, т.е. $B_{\boldsymbol{f}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B_{\boldsymbol{e}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Учитывая, что координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в базисах $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{f}$ связаны между собой соотношением $B_{\boldsymbol{e}} = A \cdot B_{\boldsymbol{f}}$, где A – матрица перехода от базиса $\boldsymbol{e}$ к базису

$\boldsymbol{f}$, получим: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Перемножив две матрицы, найдем x_1, x_2, x_3: $x_1 = 7$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$. Таким образом, вектор $\boldsymbol{b}$ в базисе $\boldsymbol{e}$ имеет координаты $\boldsymbol{b} = (7, -2, 3)$.

в) (9,–3,8) – координаты вектора $\boldsymbol{c}$ в исходном базисе $\boldsymbol{e}$, (x_1, x_2, x_3) – координаты вектора $\boldsymbol{c}$ в базисе $\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3)$, т.е. $C_{\boldsymbol{e}} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$, $C_{\boldsymbol{f}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Подставив матрицы $C_{\boldsymbol{e}}$, $C_{\boldsymbol{f}}$, A в формулу $C_{\boldsymbol{e}} = A \cdot C_{\boldsymbol{f}}$, получим СЛАУ: $\begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Решив систему методом Гаусса, получим $x_1 = 3$, $x_2 = 3$, $x_3 = -1$. Таким образом, вектор $\boldsymbol{c}$ в базисе $\boldsymbol{f}$ имеет координаты $\boldsymbol{c} = (3, 3, -1)$.

Задача 3. Убедившись в линейности оператора $\boldsymbol{A}: V_3 \to V_3$, переводящего вектор $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ в $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Ax}$, найти его матрицу в ортонормированном базисе $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$. $\boldsymbol{Ax} = [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}]$, где $\boldsymbol{a} = (3, 1, -2)$.

Решение. Линейность данного оператора вытекает из свойств векторного произведения:

1) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = [\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{a}] = [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}] + [\boldsymbol{y}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Ay} \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V_3$;

2) $\boldsymbol{A}(\lambda \boldsymbol{x}) = [\lambda \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}] = \lambda \cdot [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}] = \lambda \cdot \boldsymbol{Ax} \quad \forall \boldsymbol{x} \in V_3$, $\forall \lambda \in R$.

Для построения матрицы линейного оператора $\boldsymbol{A}$ найдем образы базисных векторов: $\boldsymbol{Ai} = [\boldsymbol{i}, \boldsymbol{a}] = (0, 2, 1)$, $\boldsymbol{Aj} = [\boldsymbol{j}, \boldsymbol{a}] = (-2, 0, -3)$, $\boldsymbol{Ak} = [\boldsymbol{k}, \boldsymbol{a}] = (-1, 3, 0)$. Из полученных векторов составим матрицу линейного оператора: $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

Задача 4. Привести матрицу A линейного оператора $\boldsymbol{A}$ к диагональному виду. Указать соответствующую матрицу перехода. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Будем опираться на теорему: матрица линейного оператора $\boldsymbol{A}: L \to L$ в некотором базисе является диагональной тогда и только тогда, когда все векторы этого базиса являются собственными векторами оператора $\boldsymbol{A}$.

а) Найдем собственные значения матрицы A. Для этого решим характеристическое уравнение $|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$ – корни характеристического уравнения.

б) Чтобы построить базис из собственных векторов, надо для каждого собственного значения λ найти фундаментальную систему решений СЛАУ $(A-\lambda E)\cdot X = O$. Для $\lambda_1 = 0$ СЛАУ имеет вид $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$. Ранг матрицы системы равен 2, поэтому ФСР системы состоит из $n-r = 3-2 = 1$ решения. Решив СЛАУ методом Гаусса, получим общее решение системы $X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\forall \alpha$, где $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ – ФСР системы. $\boldsymbol{f_1} = (1,1,1)$ – собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda_1 = 0$. Для $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$ СЛАУ имеет вид $\begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$. Ранг матрицы системы равен 1, поэтому ФСР системы состоит из $n-r = 3-1 = 2$ решений. Общее решение СЛАУ имеет вид $X = \begin{pmatrix} -\alpha-\beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\forall \alpha, \beta$, где $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ – ФСР системы. $\boldsymbol{f_2} = (-1,1,0)$ $\boldsymbol{f_3} = (-1,0,1)$ – линейно независимые собственные векторы, отвечающие собственному значению $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$. Таким образом, найденные векторы $\boldsymbol{f_1} = (1,1,1)$, $\boldsymbol{f_2} = (-1,1,0)$ $\boldsymbol{f_3} = (-1,0,1)$ образуют искомый базис, состоящий из собственных векторов оператора $\boldsymbol{A}$. Матрица линейного оператора в этом базисе имеет вид $A_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. На диагонали матрицы A_f расположены собственные значения оператора $\boldsymbol{A}$, повторяющиеся столько раз, какова их кратность. Матрица перехода от базиса $\boldsymbol{e}$ к базису $\boldsymbol{f}$ имеет вид $T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, причем $A_f = T^{-1}_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}} \cdot A \cdot T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}}$.

Замечание. Для решения данной задачи необходимо найти линейно независимые собственные векторы оператора $\boldsymbol{A}$. Нет необходимости нормировать найденные собственные векторы.

Задача 5. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа. Указать соответствующую матрицу перехода. $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 20x_2x_3$.

Решение. Так как $a_{11} = 1 \neq 0$, то соберем слагаемые, содержащие x_1, и дополним полученное выражение до полного квадрата:

$$x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 = x_1^2 + 2x_1(-2x_2 + 3x_3) + (-2x_2 + 3x_3)^2 - (-2x_2 + 3x_3)^2 =$$
$$= (x_1 - 2x_2 + 3x_3)^2 - (4x_2^2 - 12x_2x_3 + 9x_3^2) = y_1^2 - 4x_2^2 + 12x_2x_3 - 9x_3^2,$$

где $y_1 = x_1 - 2x_2 + 3x_3$.

Итак,

$$f(\boldsymbol{x}) = y_1^2 - 4x_2^2 + 12x_2x_3 - 9x_3^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 20x_2x_3 = y_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2 + 32x_2x_3.$$

Так как коэффициент при x_2^2 равен $1 \neq 0$, то соберем все слагаемые, содержащие x_2, и дополним полученное выражение до полного квадрата:

$$x_2^2 + 32x_2x_3 = x_2^2 + 2x_2 \cdot 16x_3 + (16x_3)^2 - (16x_3)^2 =$$
$$= (x_2 + 16x_3)^2 - 256x_3^2 = y_2^2 - 256x_3^2, \text{ где } y_2 = x_2 + 16x_3.$$

Итак, $f(\boldsymbol{x}) = y_1^2 + y_2^2 - 256x_3^2 - 4x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 - 260x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 - 260y_3^2$, где $y_1 = x_1 - 2x_2 + 3x_3$, $y_2 = x_2 + 16x_3$, $y_3 = x_3$. Найдем матрицу перехода от старого базиса к новому. Для этого выразим переменные x_1, x_2, x_3 через y_1, y_2, y_3: $\begin{cases} x_1 = y_1 + 2y_2 - 35y_3 \\ x_2 = y_2 - 16y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$. Итак, $X = UY$, где $U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -35 \\ 0 & 1 & -16 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица перехода от старого базиса $\boldsymbol{e}$ к новому базису $\boldsymbol{f}$. Учитывая, что матрица перехода состоит из координат векторов нового базиса в старом, записанных по столбцам, получим координаты векторов нового базиса $\boldsymbol{f_1} = (1,0,0)$, $\boldsymbol{f_2} = (2,1,0)$, $\boldsymbol{f_3} = (-35,-16,1)$.

Окончательно получим: $f(\boldsymbol{x}) = y_1^2 + y_2^2 - 260y_3^2$. Указанный канонический вид квадратичная форма имеет в каноническом базисе $\boldsymbol{f_1} = \boldsymbol{e_1}$, $\boldsymbol{f_2} = 2\boldsymbol{e_1} + \boldsymbol{e_2}$, $\boldsymbol{f_3} = -35\boldsymbol{e_1} - 16\boldsymbol{e_2} + \boldsymbol{e_3}$.

Задача 6. Привести квадратичную форму к каноническому виду ортогональным преобразованием.

$f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3$.

Решение. а) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица квадратичной формы в исходном ортонормированном базисе $\boldsymbol{e}$. Найдем собственные значения матрицы A. Для этого решим характеристическое уравнение

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$ $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -3$ – корни характеристического уравнения. $\Lambda = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ – матрица квадратичной формы в новом базисе $\boldsymbol{f}$ (в ортонормированном базисе из собственных векторов матрицы A). В базисе $\boldsymbol{f}$ квадратичная форма имеет канонический вид $f(\boldsymbol{x}) = f(y_1, y_2, y_3) = 3y_1^2 + 3y_2^2 - 3y_3^2$.

б) Чтобы построить базис из собственных векторов, надо для каждого собственного значения λ решить СЛАУ $(A-\lambda E)\cdot X = O$. Координаты собственных векторов, отвечающих собственному значению $\lambda_3 = -3$, найдем из СЛАУ $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Общее решение системы имеет вид: $X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\forall \alpha$. Вектор $\boldsymbol{a_3} = (1,1,1)$ является собственным вектором матрицы A, отвечающим собственному значению $\lambda_3 = -3$. Нормируя собственный вектор $\boldsymbol{a_3}$, получим $\boldsymbol{f_3} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Координаты собственных векторов, отвечающих собственному значению $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, найдем из СЛАУ $\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Общее решение СЛАУ имеет вид $X = \begin{pmatrix} -\alpha-\beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\forall \alpha, \beta$. $\boldsymbol{a_1} = (-1,0,1)$, $\boldsymbol{a_2} = (-1,1,0)$ - линейно независимые собственные векторы, отвечающие собственному значению $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$.

в) Найденные собственные векторы $\boldsymbol{a_1} = (-1,0,1)$ и $\boldsymbol{a_2} = (-1,1,0)$ линейно независимы, но ортогональными не являются. Построим ортонормированную пару собственных векторов, соответствующую собственному значению $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, при помощи метода ортогонализации Грама–Шмидта:

1) $\boldsymbol{g}_1 = \boldsymbol{a_1} = (-1,0,1)$, $\quad \boldsymbol{f_1} = \boldsymbol{g}_1 / \|\boldsymbol{g}_1\| = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

2) $(\boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{f_1}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\boldsymbol{g}_2 = \boldsymbol{a_2} - (\boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{f_1}) \cdot \boldsymbol{f_1} = \left(-\frac{1}{2},\ 1, -\frac{1}{2}\right)$,

$\boldsymbol{f_2} = \boldsymbol{g}_2 / \|\boldsymbol{g}_2\| = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

Найденные векторы $\boldsymbol{f_1} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\boldsymbol{f_2} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ являются ортонормированными.

г) Таким образом, найденные векторы $\boldsymbol{f_1} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\boldsymbol{f_2} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $\boldsymbol{f_3} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ образуют искомый ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора $\boldsymbol{A}$. Матрица $U = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ является ортогональной матрицей перехода от старого ортонормированного базиса $\boldsymbol{e}$ к новому ортонормированному базису $\boldsymbol{f}$, состоящему из собственных векторов матрицы A, причем $\Lambda = U^T A U$.

Задача 7. Построить кривую $-7x^2 + 48xy + 7y^2 = 625$, приведя ее уравнение к каноническому виду ортогональным преобразованием координат.

Решение. Рассмотрим матрицу квадратичной формы $A = \begin{pmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{pmatrix}$.

Уравнение кривой второго порядка можно записать в матричном виде: $X^T A X = 625$, где $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ – матрица-столбец переменных. Методом ортогонального преобразования приведем квадратичную форму $X^T A X$ к каноническому виду. Для этого найдем собственные значения и соответствующие им собственные векторы матрицы A.

а) Найдем собственные значения матрицы A. Для этого решим характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -7-\lambda & 24 \\ 24 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0$. $\lambda_1 = 25$, $\lambda_2 = -25$ – корни характеристического уравнения. $\Lambda = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -25 \end{pmatrix}$ – матрица квадратичной формы в новом базисе $\boldsymbol{f}$ (в ортонормированном базисе из собственных векторов матрицы A).

б) Найдем собственные векторы матрицы A. Координаты собственного вектора, отвечающего собственному значению $\lambda_1 = 25$, найдем из СЛАУ $(A - \lambda E) \cdot X = O$ при $\lambda = 25$: $\begin{pmatrix} -32 & 24 \\ 24 & -18 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, которая равносильна уравнению $-4x_1 + 3x_2 = 0$. Вектор $\boldsymbol{a_1} = (3, 4)$ является собственным вектором матрицы A, отвечающим собственному значению $\lambda_1 = 25$. Координаты собственного вектора, отвечающего собственному значению $\lambda_2 = -25$, найдем из СЛАУ $\begin{pmatrix} 18 & 24 \\ 24 & 32 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, которая равносильна уравнению $3x_1 + 4x_2 = 0$. Вектор $\boldsymbol{a_2} = (-4, 3)$ является собственным вектором матрицы A, отвечающим собственному значению $\lambda_2 = -25$. Нормируя собственные векторы, получим ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов матрицы A: $\boldsymbol{f_1} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$, $\boldsymbol{f_2} = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$. В базисе $\boldsymbol{f}$ квадратичная форма имеет канонический вид. Матрица $U = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ является ортогональной матрицей перехода от старого ортонормированного базиса $\boldsymbol{e}$ к новому ортонормированному базису $\boldsymbol{f}$, состоящему из собственных векторов матрицы A, $\det U = 1$.

в) Изменение базиса привело к линейной замене переменных $X = U \cdot X'$: $\begin{cases} x = \frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y' \\ y = \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y' \end{cases}$. В результате получим уравнение $(X')^T \Lambda X' = 625$, где $\Lambda = U^T AU = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -25 \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Последнее уравнение можно записать в следующем виде: $25(x')^2 - 25(y')^2 = 625$. Это уравнение легко преобразуется к каноническому уравнению гиперболы $\frac{(x')^2}{5^2} - \frac{(y')^2}{5^2} = 1$.

Чтобы построить гиперболу, заданную уравнением $-7x^2 + 48xy + 7y^2 = 625$, надо изобразить исходную систему координат XOY; в этой системе координат отложить от точки O собственные векторы $\boldsymbol{a_1}$ и $\boldsymbol{a_2}$ и вдоль них направить координатные оси новой системы координат $X'OY'$. В этой системе координат строим гиперболу с полуосями $a = 5$, $b = 5$ (см. рис. 4).

Замечание. Матрица $U = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$, где $\varphi = \arccos\frac{3}{5}$, является

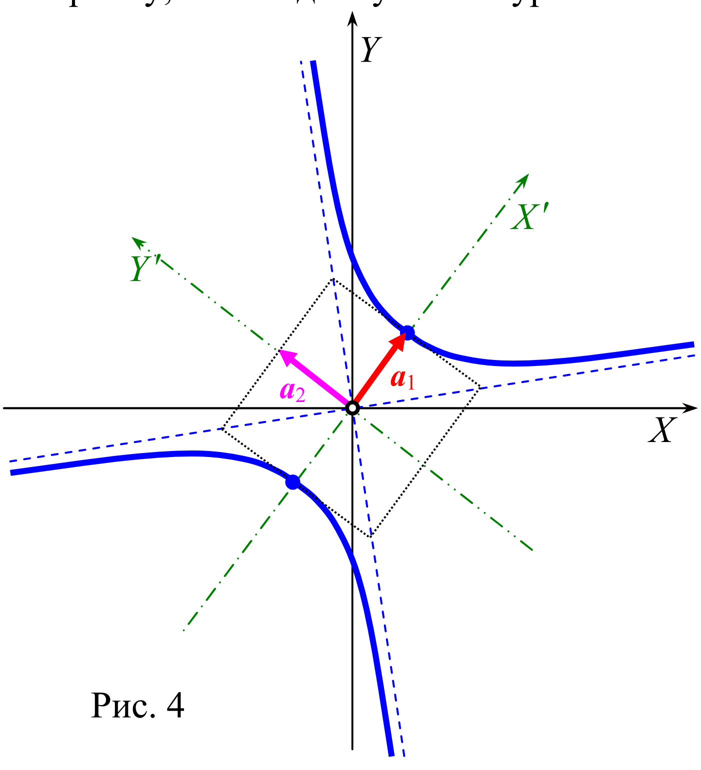

Рис. 4

матрицей линейного оператора поворота вектора, лежащего на плоскости, на угол φ против часовой стрелки. Таким образом, ортонормированный базис $\boldsymbol{f}$, состоящий из собственных векторов матрицы A, получается путем поворота базиса $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ на угол φ вокруг точки O – начала координат.

Список литературы

1. Канатников А. Н., Крищенко А. П. Линейная алгебра. Вып. IV. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. 335 с.
2. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. М.: Наука. Физматлит, 1999. 296 с.
3. Сборник задач по линейной алгебре / Под ред. Соболева С. К. М.: Изд-во МГТУ, 1991. 154 с.
4. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 1. Линейная алгебра и основы математического анализа: Учеб. пособие для втузов / Под ред. Ефимова А. В., Демидовича Б. П. М.: Наука, 1993. 478 с.
5. Ким Г. Д., Крицков Л. В. Алгебра и Аналитическая геометрия. Теоремы и задачи. Том 1. М.: Планета знаний, 2007. 469 с.
6. Ким Г. Д., Крицков Л. В. Алгебра и Аналитическая геометрия. Теоремы и задачи. Том 2. М.: Планета знаний, 2009. 456 с.