Московский Государственный Технический Университет им. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Математический анализ
Лекция 4.2

к.ф.-м.н. Семакин А.Н.

Частные производные 1-ого порядка

Частные производные 1-ого порядка

Рассмотрим функцию 2-х переменных $u = f(x_1, x_2)$, которая определена в некоторой ε-окрестности точки $a = (a_1, a_2)$.

Частные производные 1-ого порядка

Определение

Частной производной функции $f(x_1, x_2)$ по переменной x_1 в точке $a = (a_1, a_2)$ называется предел

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(a_1 + \Delta x_1, a_2) - f(a_1, a_2)}{\Delta x_1}.$$

Частные производные 1-ого порядка

Определение

Частной производной функции $f(x_1, x_2)$ по переменной x_1 в точке $a = (a_1, a_2)$ называется предел

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(a_1 + \Delta x_1, a_2) - f(a_1, a_2)}{\Delta x_1}.$$

Обозначение: $\dfrac{\partial f(a_1, a_2)}{\partial x_1}$, $f'_{x_1}(a_1, a_2)$, $f'_{x_1}(a)$.

Частные производные 1-ого порядка

Определение

Частной производной функции $f(x_1, x_2)$ по переменной x_2 в точке $a = (a_1, a_2)$ называется предел

$$\lim_{\Delta x_2 \to 0} \frac{f(a_1, a_2 + \Delta x_2) - f(a_1, a_2)}{\Delta x_2}.$$

Определение

Частной производной функции $f(x_1, x_2)$ по переменной x_2 в точке $a = (a_1, a_2)$ называется предел

$$\lim_{\Delta x_2 \to 0} \frac{f(a_1, a_2 + \Delta x_2) - f(a_1, a_2)}{\Delta x_2}.$$

Обозначение: $\dfrac{\partial f(a_1, a_2)}{\partial x_2}$, $f'_{x_2}(a_1, a_2)$, $f'_{x_2}(a)$.

Частные производные 1-ого порядка

Геометрическая интерпретация

Частная производная $\dfrac{\partial f(a_1, a_2)}{\partial x_1}$ – это тангенс угла наклона касательной к графику функции $f(x_1, x_2)$ в точке a, проведенной в направлении оси Ox_1.

Частные производные 1-ого порядка

Геометрическая интерпретация

Частная производная $\dfrac{\partial f(a_1, a_2)}{\partial x_1}$ – это тангенс угла наклона касательной к графику функции $f(x_1, x_2)$ в точке a, проведенной в направлении оси Ox_1.

Аналогично: $\dfrac{\partial f(a_1, a_2)}{\partial x_2}$ – тангенс угла наклона касательной, проведенной в направлении оси Ox_2.

Рассмотрим функцию n переменных $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Определение

Частной производной функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в точке $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ по переменной x_i называется предел

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + \Delta x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) - }{\Delta x_i}$$

$$\frac{-f(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n)}{}.$$

Частные производные 1-ого порядка

Обозначение:

Частные производные 1-ого порядка

Обозначение:

$$\frac{\partial f(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{\partial x_i}, \; f'_{x_i}(a_1, a_2, \ldots, a_n), \; f'_{x_i}(a).$$

Частные производные 1-ого порядка

Данная частная производная также называется частной производной 1-ого порядка.

Частные производные высших порядков

Частные производные высших порядков

Определение

Частная производная по переменной x_j от функции $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ называется частной производной 2-ого порядка по переменным x_i и x_j.

Частные производные высших порядков

Определение

Частная производная по переменной x_j от функции $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ называется частной производной 2-ого порядка по переменным x_i и x_j.

Обозначение: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$

Частные производные высших порядков

Определение

Частная производная по переменной x_j от функции $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ называется частной производной 2-ого порядка по переменным x_i и x_j.

Обозначение: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = f''_{x_i x_j}$

Определение

Частная производная по переменной x_j от функции $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ называется частной производной 2-ого порядка по переменным x_i и x_j.

Обозначение: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = f''_{x_i x_j} = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)'_{x_j}$.

Частные производные высших порядков

Если $i = j$, то частная производная называется чистой и

Частные производные высших порядков

Если $i = j$, то частная производная называется чистой и

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Частные производные высших порядков

Если $i = j$, то частная производная называется чистой и

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Если $i \neq j$, то частная производная называется смешанной.

Теорема (о независимости смешанных частных производных от порядка дифференцирования)

Теорема (о независимости смешанных частных производных от порядка дифференцирования)
Пусть функция $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ имеет в окрестности точки $a = (a_1, \ldots, a_n)$ частные производные 1-ого и 2-ого порядков

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j},$$

причем частные производные 2-ого порядка непрерывны в точке a. Тогда

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i},$$

причем частные производные 2-ого порядка непрерывны в точке a. Тогда

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i},$$

т.е. частные производные 2-ого порядка не зависят от последовательности переменных, по которым идет дифференцирование.

Частные производные высших порядков

Определение

Частной производной n-ого порядка называется частная производная от частной производной $(n-1)$-ого порядка.

Частные производные высших порядков

Определение

Частной производной n-ого порядка называется частная производная от частной производной $(n-1)$-ого порядка.

Пример: $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}$

Определение

Частной производной n-ого порядка называется частная производная от частной производной $(n-1)$-ого порядка.

Пример: $$\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}\right)'_{x_i}.$$

Дифференцируемость ФНП

Определение

Функция $u = f(x_1, ..., x_n)$ назывется дифференцируемой в точке $a = (a_1, ..., a_n)$, если существуют числа A_1, ..., A_n такие, что

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + ... + A_n \Delta x_n + \circ(\rho), \rho \to 0,$$

Дифференцируемость ФНП

Определение
Функция $u = f(x_1, ..., x_n)$ назывется дифференцируемой в точке $a = (a_1, ..., a_n)$, если существуют числа A_1, ..., A_n такие, что

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + ... + A_n \Delta x_n + \circ(\rho), \rho \to 0,$$

где $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + ... + \Delta x_n^2}$,

Дифференцируемость ФНП

Определение

Функция $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ назывется дифференцируемой в точке $a = (a_1, \ldots, a_n)$, если существуют числа $A_1, \ldots, A_n$ такие, что

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + \ldots + A_n \Delta x_n + \circ(\rho), \rho \to 0,$$

где $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \ldots + \Delta x_n^2}$,
$\Delta u = f(a_1 + \Delta x_1, \ldots, a_n + \Delta x_n) - f(a_1, \ldots, a_n)$ – полное приращение функции.

Теорема (необходимое условие дифференцируемости)

Теорема (необходимое условие дифференцируемости)
Если функция $f(x_1, ..., x_n)$ дифференцируема в точке a, то в этой точке существуют все частные производные первого порядка, причем $A_1 = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}, ..., A_n = \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$.

Теорема (достаточное условие дифференцируемости)

Дифференцируемость ФНП

Теорема (достаточное условие дифференцируемости)
Пусть в некоторой окрестности точки a существуют частные производные 1-ого порядка, которые непрерывны в самой точке a. Тогда функция $u = f(x_1, ..., x_n)$ дифференцируема в точке a.

Теорема (о непрерывности)

Теорема (о непрерывности)
Если функция $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ дифференцируема в точке a, то она непрерывна в ней.

Определение

Функция называется непрерывно дифференцируемой в точке a, если она имеет в этой точке непрерывные частные производные 1-ого порядка.

Дифференциал ФНП

Дифференциал ФНП

Определение

Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке a, то линейная функция

$$A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \ldots + A_n \Delta x_n$$

переменных $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ называется дифференциалом или полным дифференциалом функции $f(x)$.

Определение

Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке a, то линейная функция

$$A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \ldots + A_n \Delta x_n$$

переменных Δx_1, Δx_2, ..., Δx_n называется дифференциалом или полным дифференциалом функции $f(x)$.

Обозначение: df

Используя необходимое условие дифференцируемости и введя обозначения $dx_1 = \Delta x_1$, $dx_2 = \Delta x_2$, ..., $dx_n = \Delta x_n$, дифференциал можно записать в виде:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

Дифференциал ФНП

Правила вычисления дифференциала функции нескольких переменных аналогичны правилам вычисления дифференциала функции одной переменной.

Правила вычисления дифференциала функции нескольких переменных аналогичны правилам вычисления дифференциала функции одной переменной. Например, $d(f+g) = df + dg$, $d(c \cdot f) = c \cdot df$, где c - константа.