

Московский Государственный Технический Университет им. Баумана  
Факультет “Фундаментальные науки”  
Кафедра “Высшая математика”

# Математический анализ

## Лекция 3.6

к.ф.-м.н. Семакин А.Н.



# Условия существования экстремума



# Условия существования экстремума

*Теорема (необходимое условие экстремума)*



# Условия существования экстремума

*Теорема (необходимое условие экстремума)*

Если точка  $c$  является точкой экстремума функции  $f(x)$ , то в этой точке  $f'(c)$  равен нулю или не существует.



# Условия существования экстремума

Если  $f'(c) = 0$ , то в точке  $c$  функция имеет гладкий экстремум.



# Условия существования экстремума

Если  $f'(c) = 0$ , то в точке  $c$  функция имеет гладкий экстремум.

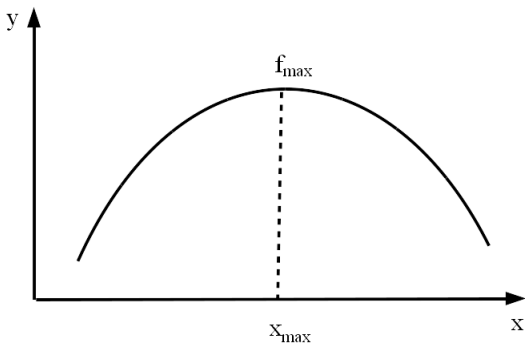


Рис. : Гладкий экстремум



## Условия существования экстремума

Если  $f'(c)$  не существует (т.е.  $f'(c) = \infty$ ), то в точке  $c$  функция имеет острый экстремум.



## Условия существования экстремума

Если  $f'(c)$  не существует (т.е.  $f'(c) = \infty$ ), то в точке  $c$  функция имеет острый экстремум.

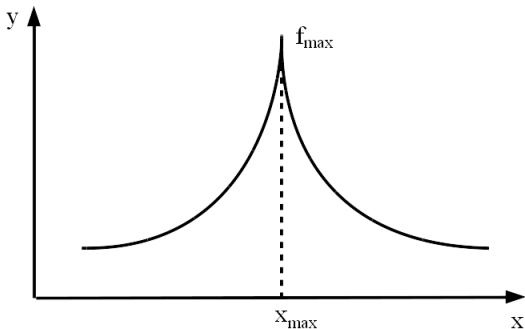


Рис. : Острый экстремум





# Условия существования экстремума

*Теорема (достаточное условие экстремума по первой производной)\**



# Условия существования экстремума

*Теорема (достаточное условие экстремума по первой производной)\**

Пусть функция  $f(x)$  дифференцируема в некоторой окрестности точки  $c$ , кроме, быть может, самой точки  $c$ , в которой она является непрерывной. Тогда если  $f'(x)$  меняет знак при переходе через точку  $c$ , то точка  $c$  является точкой экстремума.



# Условия существования экстремума

*Доказательство*



# Условия существования экстремума

*Доказательство*

Рассмотрим случай  $f'(x) > 0$  для  $x < c$  и  
 $f'(x) < 0$  для  $x > c$ .



# Условия существования экстремума

## *Доказательство*

Рассмотрим случай  $f'(x) > 0$  для  $x < c$  и  $f'(x) < 0$  для  $x > c$ . По теореме Лагранжа  $f(x) - f(c) = f'(\xi)(x - c)$ , где число  $\xi$  лежит на интервале с концами  $x$  и  $c$ .



# Условия существования экстремума

Если  $x < c$ , то  $x - c < 0$ ,  $f'(\xi) > 0$ .



# Условия существования экстремума

Если  $x < c$ , то  $x - c < 0$ ,  $f'(\xi) > 0 \Rightarrow$   
 $f(x) - f(c) < 0$ ,



# Условия существования экстремума

Если  $x < c$ , то  $x - c < 0$ ,  $f'(\xi) > 0 \Rightarrow$   
 $f(x) - f(c) < 0, f(x) < f(c)$ .





# Условия существования экстремума

Если  $x < c$ , то  $x - c < 0$ ,  $f'(\xi) > 0 \Rightarrow$   
 $f(x) - f(c) < 0, f(x) < f(c)$ .

Если  $x > c$ , то  $x - c > 0$ ,  $f'(\xi) < 0$ .



# Условия существования экстремума

Если  $x < c$ , то  $x - c < 0$ ,  $f'(\xi) > 0. \Rightarrow$   
 $f(x) - f(c) < 0, f(x) < f(c).$

Если  $x > c$ , то  $x - c > 0$ ,  $f'(\xi) < 0. \Rightarrow$   
 $f(x) - f(c) < 0,$



# Условия существования экстремума

Если  $x < c$ , то  $x - c < 0$ ,  $f'(\xi) > 0. \Rightarrow$   
 $f(x) - f(c) < 0, f(x) < f(c).$

Если  $x > c$ , то  $x - c > 0$ ,  $f'(\xi) < 0. \Rightarrow$   
 $f(x) - f(c) < 0, f(x) < f(c).$



# Условия существования экстремума

Если  $x < c$ , то  $x - c < 0$ ,  $f'(\xi) > 0. \Rightarrow$   
 $f(x) - f(c) < 0, f(x) < f(c).$

Если  $x > c$ , то  $x - c > 0$ ,  $f'(\xi) < 0. \Rightarrow$   
 $f(x) - f(c) < 0, f(x) < f(c).$

$\Rightarrow c$  - точка локального максимума.



# Условия существования экстремума

Если  $x < c$ , то  $x - c < 0$ ,  $f'(\xi) > 0 \Rightarrow$   
 $f(x) - f(c) < 0, f(x) < f(c)$ .

Если  $x > c$ , то  $x - c > 0$ ,  $f'(\xi) < 0 \Rightarrow$   
 $f(x) - f(c) < 0, f(x) < f(c)$ .

$\Rightarrow c$  - точка локального максимума.

Случай локального минимума  
рассматривается аналогично. ■



# Условия существования экстремума

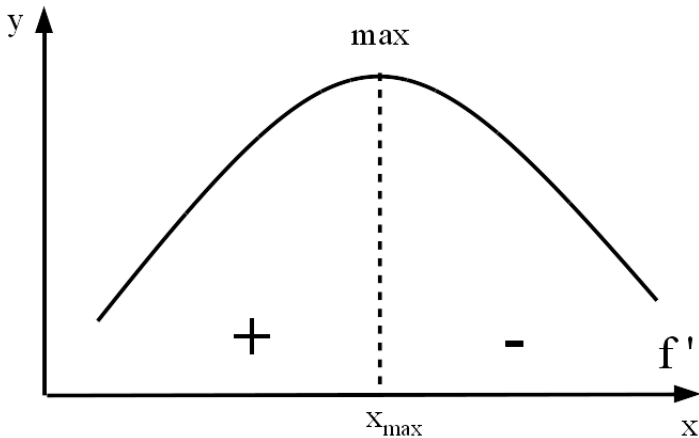


Рис. : Точка максимума



# Условия существования экстремума

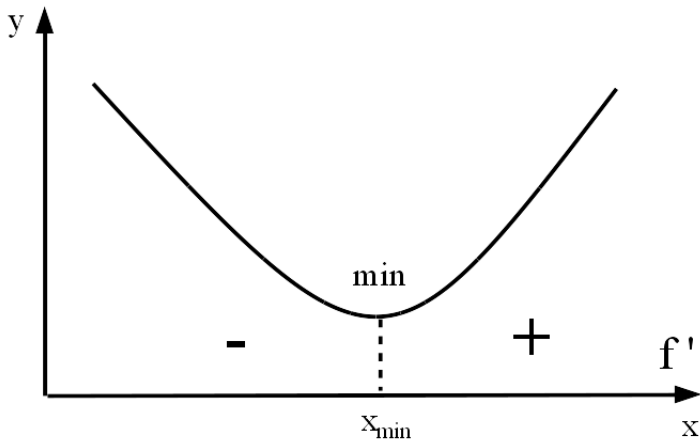


Рис. : Точка минимума



# Условия существования экстремума

*Теорема (достаточное условие экстремума по второй производной)*





# Условия существования экстремума

*Теорема (достаточное условие экстремума по второй производной)*

Пусть  $f(x) \in D^2(c)$ ,  $f'(c) = 0$ ,  $f''(c) \neq 0$ . Если  $f''(c) < 0$ , то  $c$  - точка локального максимума. Если  $f''(c) > 0$ , то  $c$  - точка локального минимума.



# Выпуклость функции



# Выпуклость функции



Рис. : Выпуклость функции



# Выпуклость функции

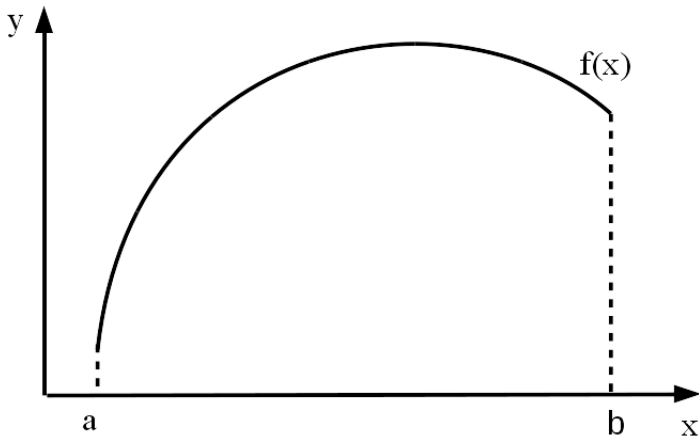


Рис. : Выпуклость функции



# Выпуклость функции

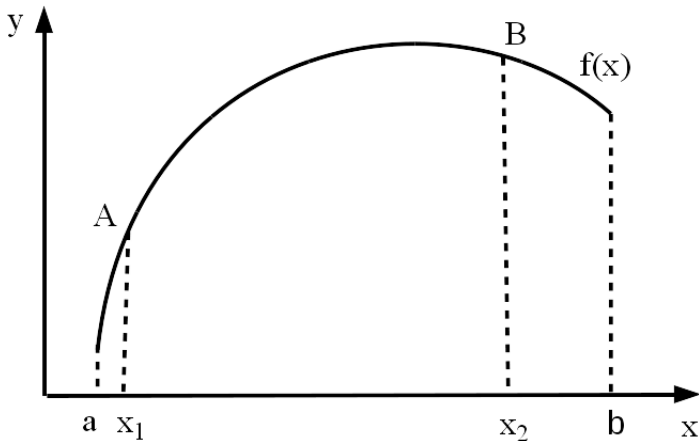


Рис. : Выпуклость функции



# Выпуклость функции

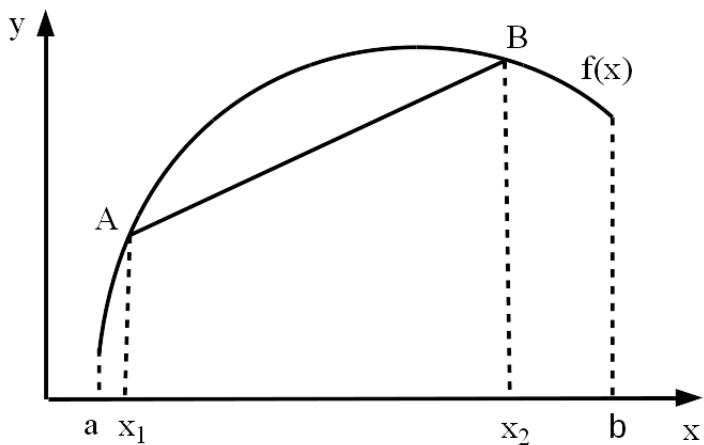


Рис. : Выпуклость функции



# Выпуклость функции

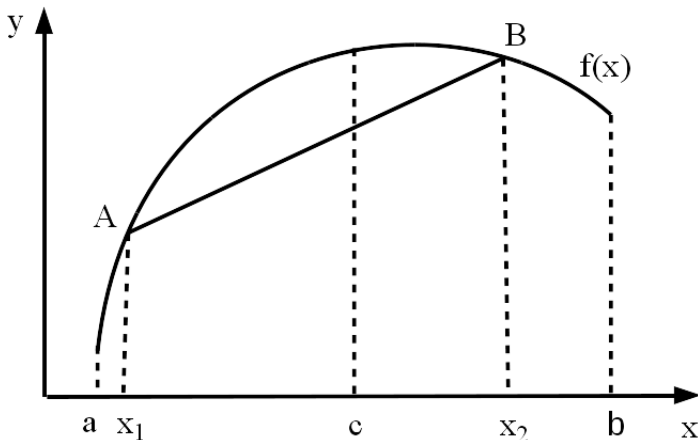


Рис. : Выпуклость функции



# Выпуклость функции

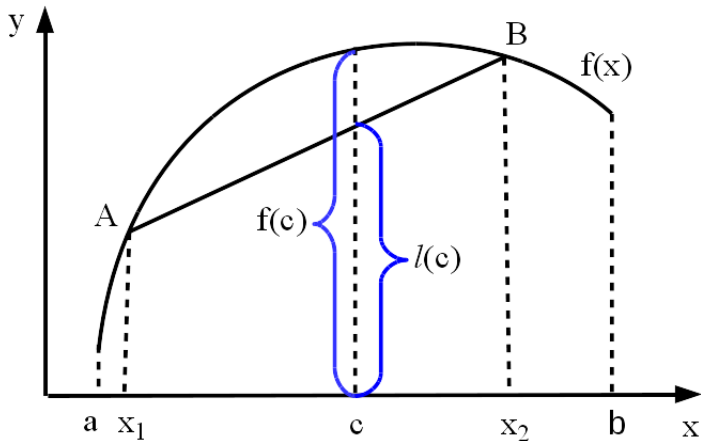


Рис. : Выпуклость функции





# Выпуклость функции

Пусть функция  $f(x)$  определена на интервале  $(a, b)$ .



# Выпуклость функции

Пусть функция  $f(x)$  определена на интервале  $(a, b)$ . Выберем на графике функции произвольные точки  $A$  с координатой  $x_1$  и  $B$  с координатой  $x_2$ .



# Выпуклость функции

Пусть функция  $f(x)$  определена на интервале  $(a, b)$ . Выберем на графике функции произвольные точки  $A$  с координатой  $x_1$  и  $B$  с координатой  $x_2$ . Через точки  $A$  и  $B$  проведем прямую с уравнением

$$l(x) = \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1}.$$



# Выпуклость функции

На интервале  $(x_1, x_2)$  выберем произвольную точку  $c$ .



# Выпуклость функции

На интервале  $(x_1, x_2)$  выберем произвольную точку  $c$ . Тогда  $f(c)$  - расстояние от оси  $Ox$  до графика функции  $f(x)$  в точке  $c$ ,  $l(c)$  - расстояние от оси  $Ox$  до прямой  $AB$  в точке  $c$ .



# Выпуклость функции

## Определение

Функция  $f(x)$  называется выпуклой вверх (вниз) на  $(a, b)$ , если  $\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2$  и  $\forall c \in (x_1, x_2)$  выполняется неравенство  $l(c) \leq f(c)$  ( $l(c) \geq f(c)$ ).



# Выпуклость функции

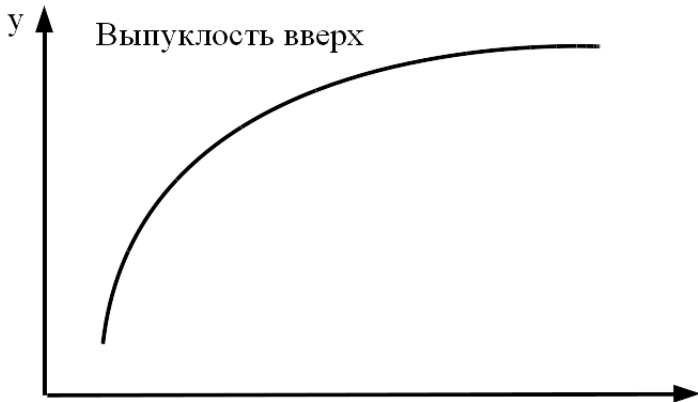


Рис. : Пример функции, выпуклой вверх



# Выпуклость функции

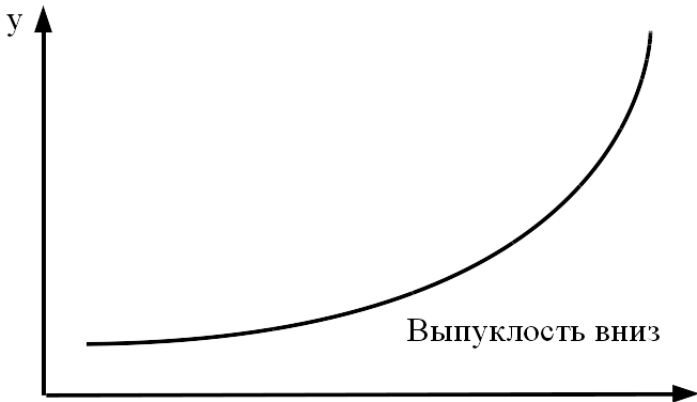


Рис. : Пример функции, выпуклой вниз





# Выпуклость функции

*Теорема (достаточное условие выпуклости)\**



# Выпуклость функции

*Теорема (достаточное условие выпуклости)\**

Пусть  $f(x) \in D^2(a, b)$ . Если  $\forall x \in (a, b)$

1)  $f''(x) \leq 0$ , то  $f(x)$  выпукла вверх,

2)  $f''(x) \geq 0$ , то  $f(x)$  выпукла вниз.



# Выпуклость функции

*Доказательство*



# Выпуклость функции

*Доказательство*

Пусть  $a < x_1 < x < x_2 < b$ .



# Выпуклость функции

*Доказательство*

Пусть  $a < x_1 < x < x_2 < b$ .

$$I(x) - f(x) =$$



# Выпуклость функции

*Доказательство*

Пусть  $a < x_1 < x < x_2 < b$ .

$$\begin{aligned} I(x) - f(x) &= \\ &= \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} - \\ &- f(x) \frac{(x - x_1) + (x_2 - x)}{x_2 - x_1} = \end{aligned}$$



# Выпуклость функции

=



# Выпуклость функции

$$= \frac{(f(x_2) - f(x))(x - x_1) - (f(x) - f(x_1))(x_2 - x)}{x_2 - x_1} =$$





# Выпуклость функции

$$= \frac{(f(x_2) - f(x))(x - x_1) - (f(x) - f(x_1))(x_2 - x)}{x_2 - x_1} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{по теореме Лагранжа} \\ f(b) - f(a) = f'(c)(b - a), a < c < b \end{array} \right| =$$



# Выпуклость функции

=



# Выпуклость функции

$$= \frac{f'(\eta)(x_2 - x)(x - x_1) - f'(\xi)(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1}$$



# Выпуклость функции

$$\begin{aligned} &= \frac{f'(\eta)(x_2 - x)(x - x_1) - f'(\xi)(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{(f'(\eta) - f'(\xi))(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} = \end{aligned}$$



# Выпуклость функции

$$\begin{aligned} &= \frac{f'(\eta)(x_2 - x)(x - x_1) - f'(\xi)(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{(f'(\eta) - f'(\xi))(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} = \\ &= \left| \begin{array}{l} \text{по теореме Лагранжа} \\ f'(b) - f'(a) = f''(c)(b - a), a < c < b \end{array} \right| = \end{aligned}$$



# Выпуклость функции

$$\begin{aligned} &= \frac{f'(\eta)(x_2 - x)(x - x_1) - f'(\xi)(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{(f'(\eta) - f'(\xi))(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} = \\ &= \left| \begin{array}{l} \text{по теореме Лагранжа} \\ f'(b) - f'(a) = f''(c)(b - a), a < c < b \end{array} \right| = \\ &= \frac{f''(\zeta)(\eta - \xi)(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1}. \end{aligned}$$



# Выпуклость функции

Здесь  $x_1 < \xi < x < \eta < x_2$  и  $\xi < \zeta < \eta$ .



# Выпуклость функции

Здесь  $x_1 < \xi < x < \eta < x_2$  и  $\xi < \zeta < \eta$ .  
 $(\eta - \xi), (x - x_1), (x_2 - x), (x_2 - x_1) > 0$ .





## Выпуклость функции

Здесь  $x_1 < \xi < x < \eta < x_2$  и  $\xi < \zeta < \eta$ .

$(\eta - \xi), (x - x_1), (x_2 - x), (x_2 - x_1) > 0$ .

Если  $f''(\zeta) \leq 0$ , то  $l(x) \leq f(x)$ .



## Выпуклость функции

Здесь  $x_1 < \xi < x < \eta < x_2$  и  $\xi < \zeta < \eta$ .

$(\eta - \xi), (x - x_1), (x_2 - x), (x_2 - x_1) > 0$ .

Если  $f''(\zeta) \leq 0$ , то  $l(x) \leq f(x)$ .

$\Rightarrow f(x)$  выпукла вверх.

Если  $f''(\zeta) \geq 0$ , то  $l(x) \geq f(x)$ .



# Выпуклость функции

Здесь  $x_1 < \xi < x < \eta < x_2$  и  $\xi < \zeta < \eta$ .

$(\eta - \xi), (x - x_1), (x_2 - x), (x_2 - x_1) > 0$ .

Если  $f''(\zeta) \leq 0$ , то  $l(x) \leq f(x)$ .

$\Rightarrow f(x)$  выпукла вверх.

Если  $f''(\zeta) \geq 0$ , то  $l(x) \geq f(x)$ .

$\Rightarrow f(x)$  выпукла вниз.



# Выпуклость функции

## *Определение*

Пусть  $f(x) \in D(c)$ ,  $L(x)$  - уравнение касательной к графику функции  $f(x)$  в точке  $c$ . Если  $f(x) - L(x)$  меняет знак при переходе через точку  $c$ , то  $c$  называется точкой перегиба функции  $f(x)$ .



# Выпуклость функции

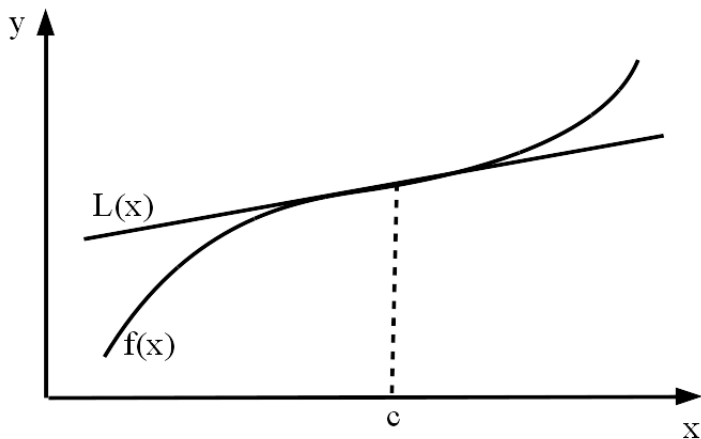


Рис. : Функция в окрестности точки перегиба



# Выпуклость функции

*Теорема (необходимое условие перегиба)\**



# Выпуклость функции

*Теорема (необходимое условие перегиба)\**

Если в точке перегиба существует вторая производная, то она равна нулю.



# Выпуклость функции

*Доказательство*





# Выпуклость функции

*Доказательство*

Пусть функция  $f(x)$  имеет в точке  $c$  вторую производную  $f''(c)$ ,



# Выпуклость функции

*Доказательство*

Пусть функция  $f(x)$  имеет в точке  $c$  вторую производную  $f''(c)$ , и  $L(x)$  - касательная к графику функции  $f(x)$  в точке  $c$ :



# Выпуклость функции

*Доказательство*

Пусть функция  $f(x)$  имеет в точке  $c$  вторую производную  $f''(c)$ , и  $L(x)$  - касательная к графику функции  $f(x)$  в точке  $c$ :

$$L(x) = f(c) + f'(c)(x - c).$$



# Выпуклость функции

По формуле Тейлора имеем:



# Выпуклость функции

По формуле Тейлора имеем:

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{1}{2}f''(c)(x-c)^2 + o((x-c)^2) =$$



# Выпуклость функции

По формуле Тейлора имеем:

$$\begin{aligned} f(x) &= \\ f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{1}{2}f''(c)(x-c)^2 + o((x-c)^2) &= \\ = L(x) + \frac{1}{2}f''(c)(x-c)^2 + o((x-c)^2). \end{aligned}$$



# Выпуклость функции

По формуле Тейлора имеем:

$$f(x) =$$

$$f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{1}{2}f''(c)(x-c)^2 + o((x-c)^2) =$$

$$= L(x) + \frac{1}{2}f''(c)(x-c)^2 + o((x-c)^2).$$

$$\Rightarrow f(x) - L(x) = \frac{1}{2}f''(c)(x-c)^2 + o((x-c)^2).$$



# Выпуклость функции

Величина  $o((x - c)^2)$  стремится к нулю быстрее, чем  $(x - c)^2$  при  $x \rightarrow c$ .





# Выпуклость функции

Величина  $o((x - c)^2)$  стремится к нулю быстрее, чем  $(x - c)^2$  при  $x \rightarrow c$ .

$\Rightarrow \exists U(c) \forall x \in U(c) :$



# Выпуклость функции

Величина  $o((x - c)^2)$  стремится к нулю быстрее, чем  $(x - c)^2$  при  $x \rightarrow c$ .

$\Rightarrow \exists U(c) \forall x \in U(c) :$

$$\left| \frac{1}{2} f''(c)(x - c)^2 \right| > |o((x - c)^2)|$$



# Выпуклость функции

Величина  $o((x - c)^2)$  стремится к нулю быстрее, чем  $(x - c)^2$  при  $x \rightarrow c$ .

$\Rightarrow \exists U(c) \forall x \in U(c) :$

$$\left| \frac{1}{2} f''(c)(x - c)^2 \right| > |o((x - c)^2)|$$

при условии, что  $f''(c) \neq 0$ .



# Выпуклость функции

В этом случае в  $U(c)$  знак  $f(x) - L(x)$  будет совпадать со знаком  $f''(c)$ ,



# Выпуклость функции

В этом случае в  $U(c)$  знак  $f(x) - L(x)$  будет совпадать со знаком  $f''(c)$ , т.е.  $f(x) - L(x)$  не будет менять знак при переходе через точку  $c$ ,



# Выпуклость функции

В этом случае в  $U(c)$  знак  $f(x) - L(x)$  будет совпадать со знаком  $f''(c)$ , т.е.  $f(x) - L(x)$  не будет менять знак при переходе через точку  $c$ , а значит,  $c$  не будет точкой перегиба.



# Выпуклость функции

В этом случае в  $U(c)$  знак  $f(x) - L(x)$  будет совпадать со знаком  $f''(c)$ , т.е.  $f(x) - L(x)$  не будет менять знак при переходе через точку  $c$ , а значит,  $c$  не будет точкой перегиба.

$\Rightarrow$  Если  $c$  - точка перегиба, то  $f''(c) = 0$ . ■



# Выпуклость функции

*Теорема (достаточное условие перегиба)*





# Выпуклость функции

*Теорема (достаточное условие перегиба)*

Если при переходе через точку  $c$  вторая производная  $f''(x)$  меняет знак, то точка  $c$  - это точка перегиба.



# Схема полного исследования функции



# Схема полного исследования функции

1. Область определения
2. Нули функции
3. Интервалы знакопостоянства
4. Асимптоты
  - а) вертикальные
  - б) наклонные
5. Точки локального экстремума, возрастание и убывание функции
6. Точки перегиба, выпуклость вверх и вниз

