Московский Государственный Технический Университет им. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Математический анализ
Лекция 3.5

к.ф.-м.н. Семакин А.Н.

Вычисление пределов
с помощью формулы Тейлора

Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

Для вычисления пределов вида

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$$

с неопределенностью $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

Для вычисления пределов вида

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$$

с неопределенностью $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ можно разложить функции $f(x)$ и $g(x)$ по формуле Тейлора в точке c,

Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

Для вычисления пределов вида

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$$

с неопределенностью $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ можно разложить функции $f(x)$ и $g(x)$ по формуле Тейлора в точке c, ограничившись лишь несколькими первыми ненулевыми членами.

Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

В результате получаем:

Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

В результате получаем:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} =$$

Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

В результате получаем:

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{a(x-c)^n + \circ((x-c)^n)}{b(x-c)^m + \circ((x-c)^m)}.$$

Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

Далее числитель и знаменатель дроби делим на $(x - c)$ в наименьшей из n и m степени

Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

Далее числитель и знаменатель дроби делим на $(x - c)$ в наименьшей из n и m степени и используем формулу

Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

Далее числитель и знаменатель дроби делим на $(x - c)$ в наименьшей из n и m степени и используем формулу

$$\lim_{x \to c} \frac{o((x-c)^{\alpha})}{(x-c)^{\beta}} = 0, \text{если } \alpha \geq \beta.$$

Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

Пример:

Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

Пример:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} =$$

Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

Пример:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) = ?$$

Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

Разложим по формуле Тейлора функции, входящие в искомое выражение:

Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

Разложим по формуле Тейлора функции, входящие в искомое выражение:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \circ(x^3), x \to 0,$$

Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

Разложим по формуле Тейлора функции, входящие в искомое выражение:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \circ(x^3),\ x \to 0,$$

$$e^{-x} = 1 + (-x) + \frac{(-x)^2}{2!} + \frac{(-x)^3}{3!} + \circ(x^3),\ x \to 0,$$

Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

Разложим по формуле Тейлора функции, входящие в искомое выражение:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \circ(x^3),\, x \to 0,$$

$$e^{-x} = 1 + (-x) + \frac{(-x)^2}{2!} + \frac{(-x)^3}{3!} + \circ(x^3),\, x \to 0,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \circ(x^4),\, x \to 0.$$

Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

Тогда

Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} =$$

Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \circ(x^3) -}{x - x + \frac{x^3}{3!} - \circ(x^4)}$$

$$\frac{-1 + x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \circ(x^3) - 2x}{} =$$

Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

$=$

Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

$$= \left| \begin{array}{l} \circ(x^n) - \circ(x^n) = \circ(x^n), \\ - \circ\,(x^n) = \circ(x^n). \end{array} \right| =$$

Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

$$= \left| \begin{array}{l} \circ(x^n) - \circ(x^n) = \circ(x^n), \\ - \circ(x^n) = \circ(x^n). \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3} + \circ(x^3)}{\frac{x^3}{6} + \circ(x^4)} =$$

Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

$$= \left| \begin{array}{l} \circ(x^n) - \circ(x^n) = \circ(x^n), \\ - \circ(x^n) = \circ(x^n). \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3} + \circ(x^3)}{\frac{x^3}{6} + \circ(x^4)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3} + \frac{\circ(x^3)}{x^3}}{\frac{1}{6} + \frac{\circ(x^4)}{x^3}} =$$

Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

$$= \left| \begin{array}{l} \circ(x^n) - \circ(x^n) = \circ(x^n), \\ - \circ(x^n) = \circ(x^n). \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3} + \circ(x^3)}{\frac{x^3}{6} + \circ(x^4)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3} + \frac{\circ(x^3)}{x^3}}{\frac{1}{6} + \frac{\circ(x^4)}{x^3}} = \frac{\frac{1}{3} + 0}{\frac{1}{6} + 0} =$$

Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

$$= \left| \begin{array}{l} o(x^n) - o(x^n) = o(x^n), \\ -\, o\,(x^n) = o(x^n). \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{\frac{x^3}{6} + o(x^4)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3} + \frac{o(x^3)}{x^3}}{\frac{1}{6} + \frac{o(x^4)}{x^3}} = \frac{\frac{1}{3} + 0}{\frac{1}{6} + 0} = 2.$$

Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Разложив функцию $f(x)$ по формуле Тейлора в окрестности точки c, будем иметь

$$f(x) = P_n(x) + r_n \quad \forall x \in U(c),$$

Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Разложив функцию $f(x)$ по формуле Тейлора в окрестности точки c, будем иметь

$$f(x) = P_n(x) + r_n \quad \forall x \in U(c),$$

где $P_n(x)$ - многочлен Тейлора степени n,

Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Разложив функцию $f(x)$ по формуле Тейлора в окрестности точки c, будем иметь

$$f(x) = P_n(x) + r_n \quad \forall x \in U(c),$$

где $P_n(x)$ - многочлен Тейлора степени n,а $r_n = \circ((x-c)^n), x \to c$ - остаточный член формулы Тейлора.

Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Отбросив r_n, получим приближенную формулу

$$f(x) \approx P_n(x).$$

Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Отбросив r_n, получим приближенную формулу
$$f(x) \approx P_n(x).$$

Чем больше n и ближе x к c, тем точнее данная формула.

Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Пример:

Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Пример:

$$\sin\frac{\pi}{6} = 0.5,$$

Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Пример:
$\sin\dfrac{\pi}{6} = 0.5, \dfrac{\pi}{6} \approx 0.5236.$

Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Пример:

$$\sin\frac{\pi}{6} = 0.5, \frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x + \circ(x^2) \approx$$

Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Пример:

$$\sin\frac{\pi}{6} = 0.5, \frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x + \circ(x^2) \approx x,$$

Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Пример:

$$\sin\frac{\pi}{6} = 0.5, \frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x + \circ(x^2) \approx x, \ \sin\frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Пример:

$$\sin\frac{\pi}{6} = 0.5, \frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x + \circ(x^2) \approx x, \ \sin\frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \circ(x^4) \approx$$

Пример:

$$\sin\frac{\pi}{6} = 0.5, \frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x + \circ(x^2) \approx x, \ \sin\frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \circ(x^4) \approx x - \frac{x^3}{3!},$$

Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Пример:

$$\sin\frac{\pi}{6} = 0.5, \frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x + \circ(x^2) \approx x, \ \sin\frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \circ(x^4) \approx x - \frac{x^3}{3!}, \ \sin\frac{\pi}{6} \approx 0.4997.$$

Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Пример:

$$\sin\frac{\pi}{6} = 0.5, \frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x + \circ(x^2) \approx x, \ \sin\frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \circ(x^4) \approx x - \frac{x^3}{3!}, \ \sin\frac{\pi}{6} \approx 0.4997.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \circ(x^6) \approx$$

Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Пример:

$$\sin\frac{\pi}{6} = 0.5, \frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x + \circ(x^2) \approx x, \ \sin\frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \circ(x^4) \approx x - \frac{x^3}{3!}, \ \sin\frac{\pi}{6} \approx 0.4997.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \circ(x^6) \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!},$$

Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Пример:

$$\sin\frac{\pi}{6} = 0.5, \frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x + \circ(x^2) \approx x, \ \sin\frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \circ(x^4) \approx x - \frac{x^3}{3!}, \ \sin\frac{\pi}{6} \approx 0.4997.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \circ(x^6) \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!},$$

$$\sin\frac{\pi}{6} \approx 0.500003.$$

Монотонность функции

Монотонность функции

Определение

Функция $f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на (a, b), если $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$: $f(x_1) \leq f(x_2)$ $(f(x_1) \geq f(x_2))$.

Монотонность функции

Определение

Функция $f(x)$ называется строго возрастающей (строго убывающей) на (a, b), если $\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2$: $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$.

Определение

Возрастающие и убывающие функции также называются монотонными.

Монотонность функции

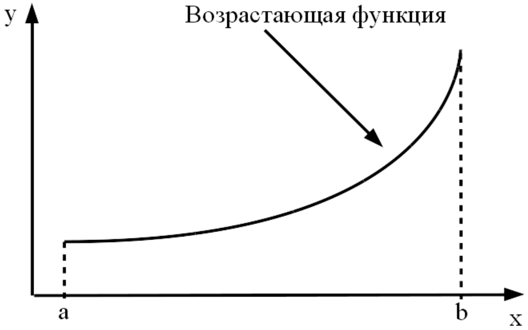

Рис. : Возрастающая функция

Монотонность функции

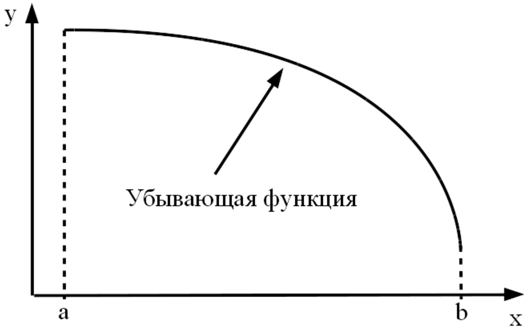

Рис. : Убывающая функция

Монотонность функции

Обозначения

Обозначения

$f(x) \in C(c)$ - функция $f(x)$ непрерывна в точке c,

Монотонность функции

Обозначения

$f(x) \in C(c)$ - функция $f(x)$ непрерывна в точке c,

$f(x) \in C(a, b)$ - функция $f(x)$ непрерывна на интервале (a, b),

Обозначения

$f(x) \in C(c)$ - функция $f(x)$ непрерывна в точке c,

$f(x) \in C(a, b)$ - функция $f(x)$ непрерывна на интервале (a, b),

$f(x) \in C[a, b]$ - функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$.

Обозначения

Обозначения

$f(x) \in D(c)$ - функция $f(x)$ дифференцируема в точке c,

Монотонность функции

Обозначения

$f(x) \in D(c)$ - функция $f(x)$ дифференцируема в точке c,

$f(x) \in D(a, b)$ - функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b),

Монотонность функции

Обозначения

$f(x) \in D(c)$ - функция $f(x)$ дифференцируема в точке c,

$f(x) \in D(a, b)$ - функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b),

$f(x) \in D[a, b]$ - функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a, b]$.

Обозначения

Монотонность функции

Обозначения

$f(x) \in D^2(c)$ - функция $f(x)$ дважды дифференцируема в точке c,

Монотонность функции

Обозначения

$f(x) \in D^2(c)$ - функция $f(x)$ дважды дифференцируема в точке c,

$f(x) \in D^2(a, b)$ - функция $f(x)$ дважды дифференцируема на интервале (a, b),

Монотонность функции

Обозначения

$f(x) \in D^2(c)$ - функция $f(x)$ дважды дифференцируема в точке c,

$f(x) \in D^2(a,b)$ - функция $f(x)$ дважды дифференцируема на интервале (a,b),

$f(x) \in D^2[a,b]$ - функция $f(x)$ дважды дифференцируема на отрезке $[a,b]$.

Монотонность функции

*Теорема (достаточное условие монотонности)**

Монотонность функции

*Теорема (достаточное условие монотонности)**
Пусть $f(x) \in C[a,b]$, $f(x) \in D(a,b)$. Если $\forall x \in (a,b)\ f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$, то на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ возрастает (убывает).

Монотонность функции

Доказательство

Монотонность функции

Доказательство

Пусть $x_1, x_2 \in [a, b]$ и $x_1 < x_2$.

Монотонность функции

Доказательство

Пусть $x_1, x_2 \in [a, b]$ и $x_1 < x_2$.

По теореме Лагранжа

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c), c \in (x_1, x_2).$$

$$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Монотонность функции

$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$

$x_2 - x_1 > 0.$

Монотонность функции

$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$

$x_2 - x_1 > 0.$

Если $f'(c) \geq 0$, то

$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$

$x_2 - x_1 > 0.$

Если $f'(c) \geq 0$, то $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$,

Монотонность функции

$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$.

$x_2 - x_1 > 0$.

Если $f'(c) \geq 0$, то $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$,

$f(x_2) \geq f(x_1)$

Монотонность функции

$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$.

$x_2 - x_1 > 0$.

Если $f'(c) \geq 0$, то $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$,

$f(x_2) \geq f(x_1)$ - $f(x)$ возрастает.

Монотонность функции

$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$

$x_2 - x_1 > 0.$

Если $f'(c) \geq 0$, то $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$,

$f(x_2) \geq f(x_1)$ - $f(x)$ возрастает.

Если $f'(c) \leq 0$, то

Монотонность функции

$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$.

$x_2 - x_1 > 0$.

Если $f'(c) \geq 0$, то $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$,

$f(x_2) \geq f(x_1)$ - $f(x)$ возрастает.

Если $f'(c) \leq 0$, то $f(x_2) - f(x_1) \leq 0$,

Монотонность функции

$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$

$x_2 - x_1 > 0.$

Если $f'(c) \geq 0$, то $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$,

$f(x_2) \geq f(x_1)$ - $f(x)$ возрастает.

Если $f'(c) \leq 0$, то $f(x_2) - f(x_1) \leq 0$,

$f(x_2) \leq f(x_1)$

$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$.

$x_2 - x_1 > 0$.

Если $f'(c) \geq 0$, то $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$,

$f(x_2) \geq f(x_1)$ - $f(x)$ возрастает.

Если $f'(c) \leq 0$, то $f(x_2) - f(x_1) \leq 0$,

$f(x_2) \leq f(x_1)$ - $f(x)$ убывает.

$\blacksquare$

Экстремум функции

Определение

Точка c называется стационарной точкой функции $f(x)$, если $f'(c) = 0$.

Определение

Точка c называется критической точкой функции $f(x)$, если $f'(c)$ равен нулю или не существует.

Определение

Точка c называется точкой локального максимума (минимума) функции $f(x)$, если существует некоторая окрестность этой точки $U(c)$ такая, что $\forall x \in U(c)\ f(x) \leq f(c)$ $(f(x) \geq f(c))$.

Определение

Точки локального максимума и минимума также называются точками экстремума.

Определение

Значение функции $f(x)$ в точке локального максимума (минимума) называется локальным максимумом (минимумом) или экстремумом функции.

Экстремум функции

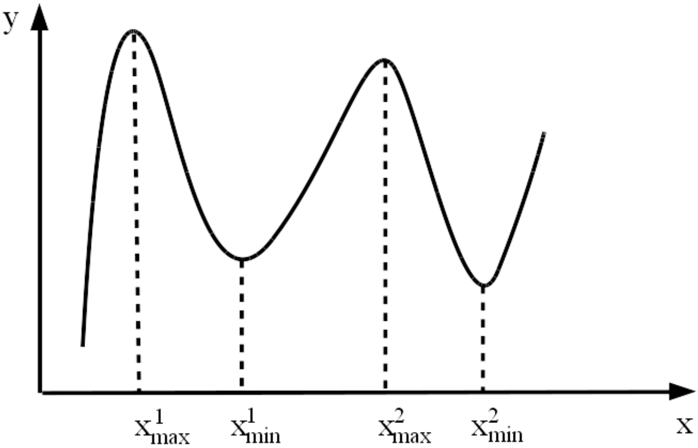

Рис. : Точки экстремума

x_{min}^1, x_{min}^2 - точки локального минимума,
x_{max}^1, x_{max}^2 - точки локального максимума.