

Московский Государственный Технический Университет им. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Математический анализ

Лекция 3.4

к.ф.-м.н. Семакин А.Н.



Формула Тейлора



Формула Тейлора

Определение

Многочленом Тейлора степени n функции $f(x)$ в точке c называется многочлен вида

$$P_n(x) = f(c) + \frac{1}{1!}f'(c)(x - c) + \\ + \frac{1}{2!}f''(c)(x - c)^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(x - c)^n.$$



Формула Тейлора

*Свойство многочлена Тейлора**



Формула Тейлора

*Свойство многочлена Тейлора**

В точке c совпадают значения функции и ее многочлена Тейлора, а также значения их первых n производных, т.е. $P_n(c) = f(c)$,
 $P'_n(c) = f'(c)$, ..., $P_n^{(n)}(c) = f^{(n)}(c)$.



Формула Тейлора

Доказательство



Формула Тейлора

Доказательство

$$P_n(c) =$$



Формула Тейлора

Доказательство

$$P_n(c) = f(c) + \frac{1}{1!}f'(c)(c - c) + \\ + \frac{1}{2!}f''(c)(c - c)^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(c - c)^n$$



Формула Тейлора

Доказательство

$$\begin{aligned} P_n(c) &= f(c) + \frac{1}{1!}f'(c)(c - c) + \\ &+ \frac{1}{2!}f''(c)(c - c)^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(c - c)^n = \\ &= f(c). \end{aligned}$$



Формула Тейлора

$$P'_n(x) =$$



Формула Тейлора

$$P'_n(x) = \frac{1}{1!}f'(c) + \frac{1}{2!}2f''(c)(x - c) + \dots + \frac{1}{n!}nf^{(n)}(c)(x - c)^{n-1}.$$



Формула Тейлора

$$P'_n(x) = \frac{1}{1!}f'(c) + \frac{1}{2!}2f''(c)(x - c) + \dots + \frac{1}{n!}nf^{(n)}(c)(x - c)^{n-1}.$$

$$P'_n(c) =$$



Формула Тейлора

$$P'_n(x) = \frac{1}{1!}f'(c) + \frac{1}{2!}2f''(c)(x - c) + \dots + \\ + \frac{1}{n!}nf^{(n)}(c)(x - c)^{n-1}.$$

$$P'_n(c) = f'(c).$$



Формула Тейлора

$$P'_n(x) = \frac{1}{1!}f'(c) + \frac{1}{2!}2f''(c)(x - c) + \dots + \frac{1}{n!}nf^{(n)}(c)(x - c)^{n-1}.$$

$$P'_n(c) = f'(c).$$

Аналогично для остальных производных. ■



Формула Тейлора

Теорема (формула Тейлора)



Формула Тейлора

Теорема (формула Тейлора)

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b) и имеет в точке $c \in (a, b)$ производные до порядка n включительно. Тогда $\forall x \in (a, b)$ справедлива формула Тейлора n -ого порядка

$$f(x) = f(c) + \frac{1}{1!}f'(c)(x - c) + \\ + \frac{1}{2!}f''(c)(x - c)^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(x - c)^n + r_n,$$

где r_n - остаточный член формулы Тейлора.



Формула Тейлора

Формы записи остаточного члена:



Формула Тейлора

Формы записи остаточного члена:

1) форма Пеано



Формула Тейлора

Формы записи остаточного члена:

1) форма Пеано

$$r_n = o((x - c)^n), x \rightarrow c$$



Формула Тейлора

Формы записи остаточного члена:

1) форма Пеано

$$r_n = o((x - c)^n), x \rightarrow c$$

2) форма Лагранжа



Формула Тейлора

Формы записи остаточного члена:

1) форма Пеано

$$r_n = o((x - c)^n), x \rightarrow c$$

2) форма Лагранжа

$$r_n = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c + \theta(x - c))(x - c)^{n+1},$$



Формула Тейлора

Формы записи остаточного члена:

1) форма Пеано

$$r_n = o((x - c)^n), x \rightarrow c$$

2) форма Лагранжа

$$r_n = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c + \theta(x - c))(x - c)^{n+1},$$
$$0 < \theta < 1$$



Формула Тейлора

Формулу Тейлора можно переписать в виде:

$$f(x) = P_n(x) + r_n.$$



Формула Тейлора

Формулу Тейлора можно переписать в виде:

$$f(x) = P_n(x) + r_n.$$

Отбросив остаточный член, получим

$$f(x) \approx P_n(x).$$



Формула Тейлора

Формулу Тейлора можно переписать в виде:

$$f(x) = P_n(x) + r_n.$$

Отбросив остаточный член, получим

$$f(x) \approx P_n(x).$$

Из формы Пеано остаточного члена следует, что чем ближе x к c , тем точнее многочлен Тейлора $P_n(x)$ описывает функцию $f(x)$.



Формула Маклорена



Формула Маклорена

Определение

Формулой Маклорена называется формула Тейлора при $c = 0$, т.е. формула вида

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!}f'(0) \cdot x + \frac{1}{2!}f''(0) \cdot x^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0) \cdot x^n + o(x^n), x \rightarrow 0.$$



Формула Маклорена

Разложим по формуле Маклорена некоторые элементарные функции.



Формула Маклорена

Разложим по формуле Маклорена некоторые элементарные функции.

1) $y = \sin x$



Формула Маклорена

Разложим по формуле Маклорена некоторые элементарные функции.

$$1) y = \sin x$$

$$f(0) = 0$$



Формула Маклорена

Разложим по формуле Маклорена некоторые элементарные функции.

$$1) y = \sin x$$

$$f(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$f'(0) = 1$$



Формула Маклорена

Разложим по формуле Маклорена некоторые элементарные функции.

$$1) y = \sin x$$

$$f(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$f''(x) = -\sin x$$

$$f'(0) = 1$$

$$f''(0) = 0$$



Формула Маклорена

Разложим по формуле Маклорена некоторые элементарные функции.

$$1) y = \sin x$$

$$f(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\sin x$$

$$f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos x$$

$$f'''(0) = -1$$



Формула Маклорена

Разложим по формуле Маклорена некоторые элементарные функции.

$$1) y = \sin x$$

$$f(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\sin x$$

$$f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos x$$

$$f'''(0) = -1$$

$$f^{IV}(x) = \sin x$$

$$f^{IV}(0) = 0$$



Формула Маклорена

Разложим по формуле Маклорена некоторые элементарные функции.

$$1) y = \sin x$$

$$f(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\sin x$$

$$f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos x$$

$$f'''(0) = -1$$

$$f^{IV}(x) = \sin x$$

$$f^{IV}(0) = 0$$

$$f^V(x) = \cos x$$

$$f^V(0) = 1$$



Формула Маклорена

$$\Rightarrow f^{(m)}(0) = \begin{cases} 0, & m = 2n, \\ (-1)^n, & m = 2n + 1, \end{cases}$$
$$n = 0, 1, 2, \dots$$



Формула Маклорена

Тогда по формуле Маклорена имеем:



Формула Маклорена

Тогда по формуле Маклорена имеем:

$$\sin x =$$



Формула Маклорена

Тогда по формуле Маклорена имеем:

$$\begin{aligned}\sin x &= 0 + \frac{1}{1!} \cdot 1 \cdot x + \frac{1}{2!} \cdot 0 \cdot x^2 + \\ &+ \frac{1}{3!} \cdot (-1) \cdot x^3 + \frac{1}{4!} \cdot 0 \cdot x^4 + \\ &+ \frac{1}{5!} \cdot 1 \cdot x^5\end{aligned}$$



Формула Маклорена

Тогда по формуле Маклорена имеем:

$$\begin{aligned}\sin x &= 0 + \frac{1}{1!} \cdot 1 \cdot x + \frac{1}{2!} \cdot 0 \cdot x^2 + \\ &+ \frac{1}{3!} \cdot (-1) \cdot x^3 + \frac{1}{4!} \cdot 0 \cdot x^4 + \\ &+ \frac{1}{5!} \cdot 1 \cdot x^5 + \dots\end{aligned}$$



Формула Маклорена

Тогда по формуле Маклорена имеем:

$$\begin{aligned}\sin x &= 0 + \frac{1}{1!} \cdot 1 \cdot x + \frac{1}{2!} \cdot 0 \cdot x^2 + \\ &+ \frac{1}{3!} \cdot (-1) \cdot x^3 + \frac{1}{4!} \cdot 0 \cdot x^4 + \\ &+ \frac{1}{5!} \cdot 1 \cdot x^5 + \dots + \frac{1}{(2n)!} \cdot 0 \cdot x^{2n} +\end{aligned}$$



Формула Маклорена

Тогда по формуле Маклорена имеем:

$$\begin{aligned}\sin x &= 0 + \frac{1}{1!} \cdot 1 \cdot x + \frac{1}{2!} \cdot 0 \cdot x^2 + \\ &+ \frac{1}{3!} \cdot (-1) \cdot x^3 + \frac{1}{4!} \cdot 0 \cdot x^4 + \\ &+ \frac{1}{5!} \cdot 1 \cdot x^5 + \dots + \frac{1}{(2n)!} \cdot 0 \cdot x^{2n} + \\ &+ \frac{1}{(2n+1)!} \cdot (-1)^n \cdot x^{2n+1} +\end{aligned}$$



Формула Маклорена

Тогда по формуле Маклорена имеем:

$$\begin{aligned}\sin x &= 0 + \frac{1}{1!} \cdot 1 \cdot x + \frac{1}{2!} \cdot 0 \cdot x^2 + \\ &+ \frac{1}{3!} \cdot (-1) \cdot x^3 + \frac{1}{4!} \cdot 0 \cdot x^4 + \\ &+ \frac{1}{5!} \cdot 1 \cdot x^5 + \dots + \frac{1}{(2n)!} \cdot 0 \cdot x^{2n} + \\ &+ \frac{1}{(2n+1)!} \cdot (-1)^n \cdot x^{2n+1} + \\ &+ \frac{1}{(2n+2)!} \cdot 0 \cdot x^{2n+2} +\end{aligned}$$



Формула Маклорена

Тогда по формуле Маклорена имеем:

$$\begin{aligned}\sin x &= 0 + \frac{1}{1!} \cdot 1 \cdot x + \frac{1}{2!} \cdot 0 \cdot x^2 + \\ &+ \frac{1}{3!} \cdot (-1) \cdot x^3 + \frac{1}{4!} \cdot 0 \cdot x^4 + \\ &+ \frac{1}{5!} \cdot 1 \cdot x^5 + \dots + \frac{1}{(2n)!} \cdot 0 \cdot x^{2n} + \\ &+ \frac{1}{(2n+1)!} \cdot (-1)^n \cdot x^{2n+1} + \\ &+ \frac{1}{(2n+2)!} \cdot 0 \cdot x^{2n+2} + o(x^{2n+2}) =\end{aligned}$$



Формула Маклорена

=



Формула Маклорена

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots +$$
$$+ (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) =$$



Формула Маклорена

$$\begin{aligned} &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \\ &+ (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) = \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}), x \rightarrow 0. \end{aligned}$$



Формула Маклорена

Примеры:



Формула Маклорена

Примеры:

$$\sin x = x + o(x^2), x \rightarrow 0.$$



Формула Маклорена

Примеры:

$$\sin x = x + o(x^2), x \rightarrow 0.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4), x \rightarrow 0.$$



Формула Маклорена

Примеры:

$$\sin x = x + o(x^2), x \rightarrow 0.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4), x \rightarrow 0.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6), x \rightarrow 0.$$



Формула Маклорена

$$2) y = \cos x$$



Формула Маклорена

$$2) y = \cos x$$

$$f(0) = 1$$



Формула Маклорена

$$2) y = \cos x$$

$$f(0) = 1$$

$$f'(x) = -\sin x$$

$$f'(0) = 0$$



Формула Маклорена

$$2) y = \cos x$$

$$f(0) = 1$$

$$f'(x) = -\sin x$$

$$f''(x) = -\cos x$$

$$f'(0) = 0$$

$$f''(0) = -1$$



Формула Маклорена

$$2) y = \cos x$$

$$f(0) = 1$$

$$f'(x) = -\sin x$$

$$f''(x) = -\cos x$$

$$f'''(x) = \sin x$$

$$f'(0) = 0$$

$$f''(0) = -1$$

$$f'''(0) = 0$$



Формула Маклорена

$$2) y = \cos x$$

$$f(0) = 1$$

$$f'(x) = -\sin x$$

$$f''(x) = -\cos x$$

$$f'''(x) = \sin x$$

$$f^{IV}(x) = \cos x$$

$$f'(0) = 0$$

$$f''(0) = -1$$

$$f'''(0) = 0$$

$$f^{IV}(0) = 1$$



Формула Маклорена

$$2) y = \cos x$$

$$f(0) = 1$$

$$f'(x) = -\sin x$$

$$f''(x) = -\cos x$$

$$f'''(x) = \sin x$$

$$f^{IV}(x) = \cos x$$

$$f^V(x) = -\sin x$$

$$f'(0) = 0$$

$$f''(0) = -1$$

$$f'''(0) = 0$$

$$f^{IV}(0) = 1$$

$$f^V(0) = 0$$



Формула Маклорена

$$\Rightarrow f^{(m)}(0) = \begin{cases} 0, & m = 2n + 1, \\ (-1)^n, & m = 2n, \end{cases}$$
$$n = 0, 1, 2, \dots$$



Формула Маклорена

Тогда по формуле Маклорена имеем:

$$\cos x =$$



Формула Маклорена

Тогда по формуле Маклорена имеем:

$$\begin{aligned}\cos x = & 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \\ & + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) =\end{aligned}$$



Формула Маклорена

Тогда по формуле Маклорена имеем:

$$\begin{aligned}\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \\ &+ (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) = \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}), x \rightarrow 0.\end{aligned}$$



Формула Маклорена

Примеры:



Формула Маклорена

Примеры:

$$\cos x = 1 + o(x), x \rightarrow 0.$$



Формула Маклорена

Примеры:

$$\cos x = 1 + o(x), x \rightarrow 0.$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3), x \rightarrow 0.$$



Формула Маклорена

Примеры:

$$\cos x = 1 + o(x), x \rightarrow 0.$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3), x \rightarrow 0.$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5), x \rightarrow 0.$$



Формула Маклорена

$$3) f(x) = e^x$$



Формула Маклорена

$$3) f(x) = e^x$$

$$f(0) = 1$$



Формула Маклорена

$$3) f(x) = e^x$$

$$f(0) = 1$$

$$f^{(m)}(x) = e^x$$



Формула Маклорена

$$3) f(x) = e^x$$

$$f(0) = 1$$

$$f^{(m)}(x) = e^x$$

$$f^{(m)}(0) = 1$$



Формула Маклорена

$$3) f(x) = e^x$$

$$f(0) = 1$$

$$f^{(m)}(x) = e^x$$

$$f^{(m)}(0) = 1$$

$$\Rightarrow e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), x \rightarrow 0.$$



Формула Маклорена

$$4) f(x) = (1 + x)^\alpha$$



Формула Маклорена

$$4) f(x) = (1 + x)^\alpha$$

$$f(0) = 1$$



Формула Маклорена

$$4) f(x) = (1 + x)^\alpha$$

$$f(0) = 1$$

$$f^{(m)}(x) = \alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - m + 1)(1 + x)^{\alpha - m}$$



Формула Маклорена

$$4) f(x) = (1 + x)^\alpha$$

$$f(0) = 1$$

$$f^{(m)}(x) = \alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - m + 1)(1 + x)^{\alpha - m}$$

$$f^{(m)}(0) = \alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - m + 1)$$



Формула Маклорена

$$\Rightarrow (1 + x)^\alpha =$$



Формула Маклорена

$$\Rightarrow (1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!} x^2 +$$



Формула Маклорена

$$\begin{aligned} \Rightarrow (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \\ &+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots + \end{aligned}$$



Формула Маклорена

$$\begin{aligned} \Rightarrow (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \\ &+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots + \\ &+ \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) = \end{aligned}$$



Формула Маклорена

$$\begin{aligned} \Rightarrow (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \\ &+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots + \\ &+ \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) = \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + \\ &+ o(x^n), x \rightarrow 0. \end{aligned}$$



Формула Маклорена

Примеры:



Формула Маклорена

Примеры:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2), x \rightarrow 0.$$



Формула Маклорена

$$5) f(x) = \ln(1 + x)$$



Формула Маклорена

$$5) f(x) = \ln(1 + x)$$

$$f(0) = 0$$



Формула Маклорена

$$5) f(x) = \ln(1 + x)$$

$$f(0) = 0$$

$$f^{(m)}(x) = (-1)^{m-1} \frac{(m-1)!}{(1+x)^m}$$



Формула Маклорена

$$5) f(x) = \ln(1 + x)$$

$$f(0) = 0$$

$$f^{(m)}(x) = (-1)^{m-1} \frac{(m-1)!}{(1+x)^m}$$

$$f^{(m)}(0) = (-1)^{m-1} (m-1)!$$



Формула Маклорена

$$5) f(x) = \ln(1 + x)$$

$$f(0) = 0$$

$$f^{(m)}(x) = (-1)^{m-1} \frac{(m-1)!}{(1+x)^m}$$

$$f^{(m)}(0) = (-1)^{m-1} (m-1)!$$

$$\Rightarrow \ln(1 + x) =$$



Формула Маклорена

$$5) f(x) = \ln(1 + x)$$

$$f(0) = 0$$

$$f^{(m)}(x) = (-1)^{m-1} \frac{(m-1)!}{(1+x)^m}$$

$$f^{(m)}(0) = (-1)^{m-1} (m-1)!$$

$$\Rightarrow \ln(1+x) =$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n), x \rightarrow 0.$$

