

Московский Государственный Технический Университет им. Баумана  
Факультет “Фундаментальные науки”  
Кафедра “Высшая математика”

# Математический анализ

## Лекция 3.3

к.ф.-м.н. Семакин А.Н.



# Производная в экстремальных точках



# Производная в экстремальных точках

*Теорема (теорема Ферма)\**



# Производная в экстремальных точках

## *Теорема (теорема Ферма)\**

Если функция определена в некоторой окрестности точки  $c$ , принимает в этой точке наибольшее или наименьшее значение и имеет в ней конечную или определенного знака бесконечную производную, то эта производная равна нулю.



# Производная в экстремальных точках

*Доказательство*



# Производная в экстремальных точках

*Доказательство*

Пусть функция  $f(x)$  определена в окрестности  $U(c)$  точки  $c$  и принимает в этой точке наибольшее значение.



# Производная в экстремальных точках

*Доказательство*

Пусть функция  $f(x)$  определена в окрестности  $U(c)$  точки  $c$  и принимает в этой точке наибольшее значение.

Тогда  $\forall x \in U(c) f(x) \leq f(c)$ .



# Производная в экстремальных точках

Соответственно,





# Производная в экстремальных точках

Соответственно,  
если  $x < c$ , то  $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$  (1)



# Производная в экстремальных точках

Соответственно,

если  $x < c$ , то 
$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \quad (1)$$

если  $x > c$ , то 
$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \quad (2)$$



# Производная в экстремальных точках

Соответственно,

$$\text{если } x < c, \text{ то } \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \quad (1)$$

$$\text{если } x > c, \text{ то } \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \quad (2)$$

Перейдя к пределу в данных неравенствах при  $x \rightarrow c$ , получим



# Производная в экстремальных точках

Соответственно,

$$\text{если } x < c, \text{ то } \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \quad (1)$$

$$\text{если } x > c, \text{ то } \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \quad (2)$$

Перейдя к пределу в данных неравенствах при  $x \rightarrow c$ , получим

$$(1) \Rightarrow f'(c) \geq 0$$



# Производная в экстремальных точках

Соответственно,

$$\text{если } x < c, \text{ то } \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \quad (1)$$

$$\text{если } x > c, \text{ то } \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \quad (2)$$

Перейдя к пределу в данных неравенствах при  $x \rightarrow c$ , получим

$$(1) \Rightarrow f'(c) \geq 0$$

$$(2) \Rightarrow f'(c) \leq 0$$



# Производная в экстремальных точках

Соответственно,

$$\text{если } x < c, \text{ то } \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \quad (1)$$

$$\text{если } x > c, \text{ то } \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \quad (2)$$

Перейдя к пределу в данных неравенствах при  $x \rightarrow c$ , получим

$$(1) \Rightarrow f'(c) \geq 0 \quad \Rightarrow f'(c) = 0. \quad \blacksquare$$

$$(2) \Rightarrow f'(c) \leq 0$$



# Теоремы о средних значениях



# Теоремы о средних значениях

*Теорема (теорема Ролля)\**





# Теоремы о средних значениях

## Теорема (теорема Ролля)\*

Пусть функция  $f(x)$  удовлетворяет условиям:

- 1) непрерывна на отрезке  $[a, b]$ ,
- 2) имеет на интервале  $(a, b)$  конечную или определенного знака бесконечную производную,
- 3)  $f(a) = f(b)$ .

Тогда  $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$ .



# Теоремы о средних значениях

*Доказательство*



# Теоремы о средних значениях

## *Доказательство*

Поскольку  $f(x) \in C[a, b]$ , то она достигает на  $[a, b]$  своего наибольшего  $M$  и наименьшего  $m$  значений.



# Теоремы о средних значениях

## *Доказательство*

Поскольку  $f(x) \in C[a, b]$ , то она достигает на  $[a, b]$  своего наибольшего  $M$  и наименьшего  $m$  значений. Возможны случаи:



# Теоремы о средних значениях

## Доказательство

Поскольку  $f(x) \in C[a, b]$ , то она достигает на  $[a, b]$  своего наибольшего  $M$  и наименьшего  $m$  значений. Возможны случаи:

1)  $m = M$



# Теоремы о средних значениях

## Доказательство

Поскольку  $f(x) \in C[a, b]$ , то она достигает на  $[a, b]$  своего наибольшего  $M$  и наименьшего  $m$  значений. Возможны случаи:

1)  $m = M$

Тогда  $f(x) = \text{const}$



# Теоремы о средних значениях

## Доказательство

Поскольку  $f(x) \in C[a, b]$ , то она достигает на  $[a, b]$  своего наибольшего  $M$  и наименьшего  $m$  значений. Возможны случаи:

1)  $m = M$

Тогда  $f(x) = \text{const} \Rightarrow \forall x \in (a, b) : f'(x) = 0$



# Теоремы о средних значениях

## Доказательство

Поскольку  $f(x) \in C[a, b]$ , то она достигает на  $[a, b]$  своего наибольшего  $M$  и наименьшего  $m$  значений. Возможны случаи:

1)  $m = M$

Тогда  $f(x) = \text{const} \Rightarrow \forall x \in (a, b) : f'(x) = 0$

2)  $m \neq M$





# Теоремы о средних значениях

## Доказательство

Поскольку  $f(x) \in C[a, b]$ , то она достигает на  $[a, b]$  своего наибольшего  $M$  и наименьшего  $m$  значений. Возможны случаи:

1)  $m = M$

Тогда  $f(x) = \text{const} \Rightarrow \forall x \in (a, b) : f'(x) = 0$

2)  $m \neq M$

Так как  $f(a) = f(b)$ , то  $m$  или  $M$  достигаются на интервале  $(a, b)$ .



# Теоремы о средних значениях

Пусть  $M$  достигается на  $(a, b)$ , т.е.  
 $M = f(c), c \in (a, b)$ .



# Теоремы о средних значениях

Пусть  $M$  достигается на  $(a, b)$ , т.е.

$M = f(c)$ ,  $c \in (a, b)$ . Тогда по теореме Ферма  $f'(c) = 0$ . ■



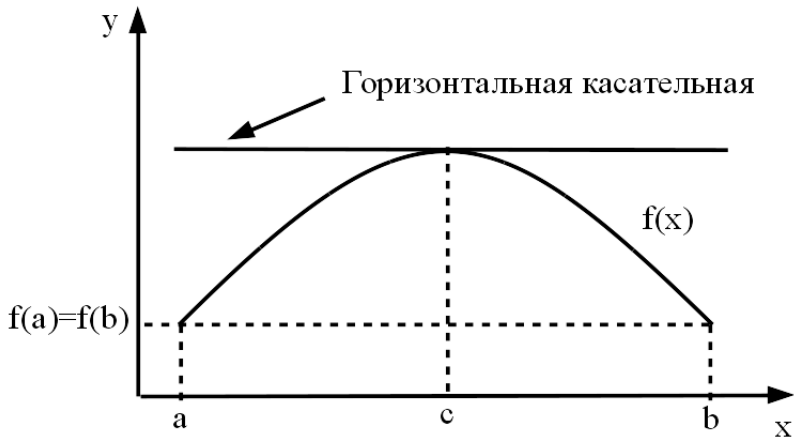
# Теоремы о средних значениях

*Геометрическая интерпретация теоремы:*



# Теоремы о средних значениях

*Геометрическая интерпретация теоремы:*



# Теоремы о средних значениях

Если функция  $f(x)$  удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, то на интервале  $(a, b)$  существует точка с горизонтальной касательной



# Теоремы о средних значениях

*Теорема (теорема Лагранжа, теорема о конечных приращениях)\**



# Теоремы о средних значениях

*Теорема (теорема Лагранжа, теорема о конечных приращениях)\**

Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и в каждой точке интервала  $(a, b)$  имеет конечную или определенного знака бесконечную производную, то

$$\exists c \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$





# Теоремы о средних значениях

*Доказательство*



# Теоремы о средних значениях

*Доказательство*

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$



# Теоремы о средних значениях

*Доказательство*

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Функция  $F(x)$  удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля.



# Теоремы о средних значениях

*Доказательство*

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Функция  $F(x)$  удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля.

$$\Rightarrow \exists c \in (a, b) : F'(c) = 0.$$



# Теоремы о средних значениях

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$



# Теоремы о средних значениях

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$
$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



# Теоремы о средних значениях

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$
$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$



# Теоремы о средних значениях

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$
$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$
$$\Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \blacksquare$$





# Теоремы о средних значениях

## *Теорема (теорема Коши)*



# Теоремы о средних значениях

## Теорема (теорема Коши)

Пусть функции  $f$  и  $g$

- 1) непрерывны на отрезке  $[a, b]$ ,
- 2) имеют производные в каждой точке интервала  $(a, b)$ ,
- 3)  $g' \neq 0$  во всех точках интервала  $(a, b)$ .

Тогда

$$\exists c \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$



# Правило Лопиталя



# Правило Лопиталя

Правило Лопиталя - это способ нахождения пределов функций через их производные.



# Правило Лопиталя

Правило Лопиталя - это способ нахождения пределов функций через их производные.  
Рассмотрим частный случай раскрытия неопределенности  $\left(\frac{0}{0}\right)$



# Правило Лопиталя

*Теорема (правило Лопиталя)\**



# Правило Лопиталя

*Теорема (правило Лопиталя)\**

Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$

1) непрерывны и дифференцируемы на интервале  $(a, b)$ ,

$$2) \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = 0,$$

$$3) \forall x \in (a, b) : g'(x) \neq 0,$$

$$4) \exists \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K.$$

$$\text{Тогда } \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$



# Правило Лопиталя

*Доказательство*





# Правило Лопиталя

*Доказательство*

Доопределим функции  $f(x)$  и  $g(x)$  в точке  $x = a$ , положив  $f(a) = g(a) = 0$ .



# Правило Лопиталя

## *Доказательство*

Доопределим функции  $f(x)$  и  $g(x)$  в точке  $x = a$ , положив  $f(a) = g(a) = 0$ . В этом случае функции  $f(x)$  и  $g(x)$  становятся непрерывными в точке  $a$ .



# Правило Лопиталя

## *Доказательство*

Доопределим функции  $f(x)$  и  $g(x)$  в точке  $x = a$ , положив  $f(a) = g(a) = 0$ . В этом случае функции  $f(x)$  и  $g(x)$  становятся непрерывными в точке  $a$ .

$\Rightarrow f(x)$  и  $g(x)$  начинают удовлетворять всем условиям теоремы Коши на любом отрезке  $[a, x]$ , где  $a < x < b$ .



# Правило Лопиталя

$$\Rightarrow \exists c(x) \in (a, x) : \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} =$$



# Правило Лопиталя

$$\Rightarrow \exists c(x) \in (a, x) : \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}. \quad (1)$$



# Правило Лопиталя

$$\Rightarrow \exists c(x) \in (a, x) : \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}. \quad (1)$$

Так как  $a < c < x$ , то  $\lim_{x \rightarrow a+0} c = a$ .



# Правило Лопиталя

$$\Rightarrow \exists c(x) \in (a, x) : \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}. \quad (1)$$

Так как  $a < c < x$ , то  $\lim_{x \rightarrow a+0} c = a$ .

Тогда по теореме о замене переменной в пределе имеем:



# Правило Лопиталя

$$\Rightarrow \exists c(x) \in (a, x) : \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}. \quad (1)$$

Так как  $a < c < x$ , то  $\lim_{x \rightarrow a+0} c = a$ .

Тогда по теореме о замене переменной в пределе имеем:

$$K = \lim_{c \rightarrow a+0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}.$$





# Правило Лопиталя

⇒ по равенству (1)

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = K.$$



# Правило Лопиталя

⇒ по равенству (1)

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = K.$$

По условию 4 теоремы  $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K.$



# Правило Лопиталя

⇒ по равенству (1)

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = K.$$

По условию 4 теоремы  $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K.$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \blacksquare$$



# Правило Лопиталя

*Общий случай:*



# Правило Лопиталя

*Общий случай:*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left( \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

где  $a$  - это конечное число или одна из бесконечностей.



# Порядок роста функций



# Порядок роста функций

## Определение

Говорят, что бесконечно большая при  $x \rightarrow a$  функция  $f(x)$  имеет более высокий порядок роста, чем бесконечно большая при  $x \rightarrow a$  функция  $g(x)$ , если

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$



# Порядок роста функций

Примеры:





# Порядок роста функций

Примеры:

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{\ln x}$$



# Порядок роста функций

Примеры:

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{\ln x} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right)$$



# Порядок роста функций

Примеры:

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{\ln x} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx^{n-1}}{1/x}$$



# Порядок роста функций

Примеры:

$$\begin{aligned} 1) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{\ln x} &= \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx^{n-1}}{1/x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} nx^n \end{aligned}$$



# Порядок роста функций

Примеры:

$$\begin{aligned} 1) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{\ln x} &= \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx^{n-1}}{1/x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} nx^n = +\infty \end{aligned}$$



# Порядок роста функций

Примеры:

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{\ln x} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx^{n-1}}{1/x} = \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} nx^n = +\infty$$

2)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^n}$$



# Порядок роста функций

Примеры:

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{\ln x} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx^{n-1}}{1/x} = \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} nx^n = +\infty$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^n} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right)$$



# Порядок роста функций

Примеры:

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{\ln x} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx^{n-1}}{1/x} = \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} nx^n = +\infty$$

2)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^n} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x \ln a}{nx^{n-1}}$$





# Порядок роста функций

Примеры:

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{\ln x} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx^{n-1}}{1/x} = \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} nx^n = +\infty$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^n} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x \ln a}{nx^{n-1}} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right)$$



# Порядок роста функций

Примеры:

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{\ln x} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx^{n-1}}{1/x} = \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} nx^n = +\infty$$

2)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^n} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x \ln a}{nx^{n-1}} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x \ln^2 a}{n(n-1)x^{n-2}}$$



# Порядок роста функций

Примеры:

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{\ln x} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx^{n-1}}{1/x} = \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} nx^n = +\infty$$

2)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^n} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x \ln a}{nx^{n-1}} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x \ln^2 a}{n(n-1)x^{n-2}} = \dots$$



# Порядок роста функций

Примеры:

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{\ln x} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx^{n-1}}{1/x} = \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} nx^n = +\infty$$

2)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^n} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x \ln a}{nx^{n-1}} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x \ln^2 a}{n(n-1)x^{n-2}} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x \ln^n a}{n!}$$



# Порядок роста функций

Примеры:

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{\ln x} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx^{n-1}}{1/x} = \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} nx^n = +\infty$$

2)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^n} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x \ln a}{nx^{n-1}} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x \ln^2 a}{n(n-1)x^{n-2}} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x \ln^n a}{n!} = \\ = +\infty, a > 1$$



# Порядок роста функций

Показательная функция растет быстрее степенной, а степенная функция растет быстрее логарифмической.

