Московский Государственный Технический Университет им. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Математический анализ
Лекция 3.2

к.ф.-м.н. Семакин А.Н.

Дифференцируемость функции

Дифференцируемость функции

Определение

Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0, если ее приращение Δf в этой точке можно представить в виде:

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x), \Delta x \to 0,$$

где A - постоянная, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta f = f(x) - f(x_0)$.

Дифференцируемость функции

Определение

Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0, если ее приращение Δf в этой точке можно представить в виде:

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x), \Delta x \to 0,$$

где A - постоянная, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta f = f(x) - f(x_0)$.

Обозначение: $f(x) \in D(x_0)$

Дифференцируемость функции

Определение

Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0, если ее приращение Δf в этой точке можно представить в виде:

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x), \Delta x \to 0,$$

где A - постоянная, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta f = f(x) - f(x_0)$.

Обозначение: $f(x) \in D(x_0)$ - функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0.

*Теорема (об эквивалентности дифференцируемости и существования производной)**

Дифференцируемость функции

*Теорема (об эквивалентности дифференцируемости и существования производной)**

$$f(x) \in D(x_0) \Leftrightarrow \exists f'(x_0).$$

Доказательство

Доказательство

1) необходимость ($\Rightarrow$)

Доказательство

1) необходимость $(\Rightarrow)$

Дано: $f(x) \in D(x_0)$

Дифференцируемость функции

Доказательство

1) необходимость ($\Rightarrow$)

Дано: $f(x) \in D(x_0)$

Доказать: $\exists f'(x_0)$

Дифференцируемость функции

$$f(x) \in D(x_0)$$

Дифференцируемость функции

$$f(x) \in D(x_0)$$

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x)$$

Дифференцируемость функции

$$f(x) \in D(x_0)$$
$$\Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x) \qquad : \Delta x$$

Дифференцируемость функции

$$f(x) \in D(x_0)$$

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x) \qquad : \Delta x$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = A + \frac{\circ(\Delta x)}{\Delta x}$$

Дифференцируемость функции

$$f(x) \in D(x_0)$$

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x) \qquad : \Delta x$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = A + \frac{\circ(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\circ(\Delta x)}{\Delta x}$$

Дифференцируемость функции

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A$$

Дифференцируемость функции

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A$$

$$\Downarrow$$

$$\exists f'(x_0).$$

Дифференцируемость функции

2) достаточность ($\Leftarrow$)

2) достаточность ($\Leftarrow$)

Дано: $\exists f'(x_0)$

2) достаточность ($\Leftarrow$)
Дано: $\exists f'(x_0)$
Доказать: $f(x) \in D(x_0)$

Дифференцируемость функции

$f(x) \in D(x_0)$

Дифференцируемость функции

$$f(x) \in D(x_0) \Rightarrow \exists \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Дифференцируемость функции

$$f(x) \in D(x_0) \Rightarrow \exists \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Пусть $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A.$

Дифференцируемость функции

$$f(x) \in D(x_0) \Rightarrow \exists \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Пусть $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = A.$

По теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой

Дифференцируемость функции

$$f(x) \in D(x_0) \Rightarrow \exists \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Пусть $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A.$

По теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x),$$

Дифференцируемость функции

$$f(x) \in D(x_0) \Rightarrow \exists \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Пусть $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = A.$

По теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой

$\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x)$ - бесконечно малая при $\Delta x \to 0$.

Дифференцируемость функции

$$f(x) \in D(x_0) \Rightarrow \exists \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Пусть $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A.$

По теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой

$\frac{\Delta f}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x)$ - бесконечно малая при $\Delta x \to 0$.

Отсюда $\Delta f =$

Дифференцируемость функции

$$f(x) \in D(x_0) \Rightarrow \exists \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Пусть $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = A.$

По теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой

$\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x)$ - бесконечно малая при $\Delta x \to 0$.

Отсюда $\Delta f = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x.$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} =$$

Дифференцируемость функции

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) =$$

Дифференцируемость функции

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$$

Дифференцируемость функции

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x = \circ(\Delta x), \Delta x \to 0$$

Дифференцируемость функции

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x = \circ(\Delta x), \Delta x \to 0$$

$$\Rightarrow \Delta f = A\cdot\Delta x + \circ(\Delta x)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x = \circ(\Delta x), \Delta x \to 0$$

$$\Rightarrow \Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x)$$

$$\Rightarrow f(x) \in D(x_0).$$

$\blacksquare$

*Теорема (о непрерывности дифференцируемой функции)**

*Теорема (о непрерывности дифференцируемой функции)**

$$f(x) \in D(x_0) \Rightarrow f(x) \in C(x_0).$$

Дифференцируемость функции

Доказательство

Доказательство

$f(x) \in D(x_0)$

Дифференцируемость функции

Доказательство

$f(x) \in D(x_0) \Rightarrow \Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x)$

Доказательство

$f(x) \in D(x_0) \Rightarrow \Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x)$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f =$

Доказательство

$$f(x) \in D(x_0) \Rightarrow \Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \to 0} (A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x)) =$$

Дифференцируемость функции

Доказательство

$$f(x) \in D(x_0) \Rightarrow \Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \to 0} (A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x)) = 0$$

Дифференцируемость функции

Доказательство

$$f(x) \in D(x_0) \Rightarrow \Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \to 0} (A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x)) = 0$$

$$\Rightarrow f(x) \in C(x_0).$$

$\blacksquare$

Производные высших порядков

Производные высших порядков

Определение
Производной второго порядка функции $f(x)$ называется производная от производной $f'(x)$.

Производные высших порядков

Определение

Производной второго порядка функции $f(x)$ называется производная от производной $f'(x)$.

Обозначение: $f''(x)$

Определение

Производной второго порядка функции $f(x)$ называется производная от производной $f'(x)$.

Обозначение: $f''(x) = (f'(x))'$

Производные высших порядков

Определение

Производной n-ого порядка функции $f(x)$ называется производная от производной $(n-1)$-ого порядка.

Производные высших порядков

Определение

Производной n-ого порядка функции $f(x)$ называется производная от производной $(n-1)$-ого порядка.

Обозначение: $f^{(n)}(x)$

Производные высших порядков

Определение

Производной n-ого порядка функции $f(x)$ называется производная от производной $(n-1)$-ого порядка.

Обозначение: $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$

Производные высших порядков

Определение

Производной n-ого порядка функции $f(x)$ называется производная от производной $(n-1)$-ого порядка.

Обозначение: $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$

$$f^{(2)}(x), f^{(3)}(x), f^{(4)}(x), f^{(5)}(x), \ldots$$

Определение

Производной n-ого порядка функции $f(x)$ называется производная от производной $(n-1)$-ого порядка.

Обозначение: $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$

$$f^{(2)}(x), f^{(3)}(x), f^{(4)}(x), f^{(5)}(x), \ldots$$
$$f''(x), f'''(x), f^{IV}(x), f^{V}(x), \ldots$$

Производные высших порядков

Пример:

Пример:

$(2^x)' = 2^x \ln 2,$

Пример:

$(2^x)' = 2^x \ln 2,$

$(2^x)'' = 2^x \ln^2 2,$

Пример:

$(2^x)' = 2^x \ln 2,$

$(2^x)'' = 2^x \ln^2 2,$

$(2^x)''' = 2^x \ln^3 2,$

Пример:

$(2^x)' = 2^x \ln 2,$

$(2^x)'' = 2^x \ln^2 2,$

$(2^x)''' = 2^x \ln^3 2,$

$\ldots$

Пример:

$(2^x)' = 2^x \ln 2,$

$(2^x)'' = 2^x \ln^2 2,$

$(2^x)''' = 2^x \ln^3 2,$

$\ldots$

$(2^x)^{(n)} = 2^x \ln^n 2.$

Физический смысл второй производной

Физический смысл второй производной

$S(t)$ - длина пути, пройденного телом за время t.

$S(t)$ - длина пути, пройденного телом за время t.
$V = S'(t)$ - скорость

Физический смысл второй производной

$S(t)$ - длина пути, пройденного телом за время t.

$V = S'(t)$ - скорость

$a = V'(t) = S''(t)$ - ускорение

Дифференциал функции

Дифференциал функции

Пусть $f(x) \in D(x_0)$.

Дифференциал функции

Пусть $f(x) \in D(x_0)$. Тогда
$\Delta f = A\Delta x + \circ(\Delta x), \Delta x \to 0.$

Дифференциал функции

Пусть $f(x) \in D(x_0)$. Тогда
$\Delta f = A\Delta x + \circ(\Delta x), \Delta x \to 0.$

Определение
Линейная функция $A\Delta x$ называется дифференциалом функции $f(x)$ в точке x_0.

Дифференциал функции

Пусть $f(x) \in D(x_0)$. Тогда
$\Delta f = A\Delta x + \circ(\Delta x), \Delta x \to 0.$

Определение
Линейная функция $A\Delta x$ называется дифференциалом функции $f(x)$ в точке x_0.
Обозначение: $df(x_0)$

Определим константу A:

Определим константу A:

$$\Delta f = A\Delta x + \circ(\Delta x)$$

Определим константу A:

$$\Delta f = A\Delta x + \circ(\Delta x) \qquad : \Delta x$$

Определим константу A:

$$\Delta f = A\Delta x + \circ(\Delta x) \qquad : \Delta x$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = A + \frac{\circ(\Delta x)}{\Delta x}$$

Определим константу A:

$$\Delta f = A\Delta x + \circ(\Delta x) \qquad : \Delta x$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = A + \frac{\circ(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\circ(\Delta x)}{\Delta x}$$

Дифференциал функции

$$f'(x_0) = A$$

Дифференциал функции

$$f'(x_0) = A$$

$$\Downarrow$$

Дифференциал функции

$$f'(x_0) = A$$

$$\Downarrow$$

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$$

Дифференциал функции

Приращение независимой переменной Δx часто обозначают как dx.

Дифференциал функции

Приращение независимой переменной Δx часто обозначают как dx. Тогда

$$df(x_0) = f'(x_0)dx.$$

Дифференциал функции

Пример:

Пример:

$f(x) = 2^x, x_0 = 0,$

Пример:

$f(x) = 2^x, x_0 = 0,$

$f'(x) = 2^x \ln 2, f'(0) = \ln 2$

Пример:

$f(x) = 2^x, x_0 = 0,$

$f'(x) = 2^x \ln 2, f'(0) = \ln 2$

$\Rightarrow df(0) = \ln 2 dx.$

Геометрический смысл дифференциала

Геометрический смысл дифференциала

Рис. : Приращение Δf и дифференциал df функции

Геометрический смысл дифференциала

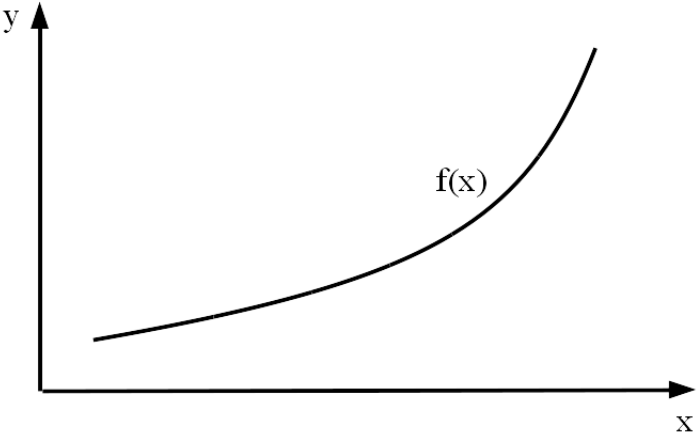

Рис. : Приращение Δf и дифференциал df функции

Геометрический смысл дифференциала

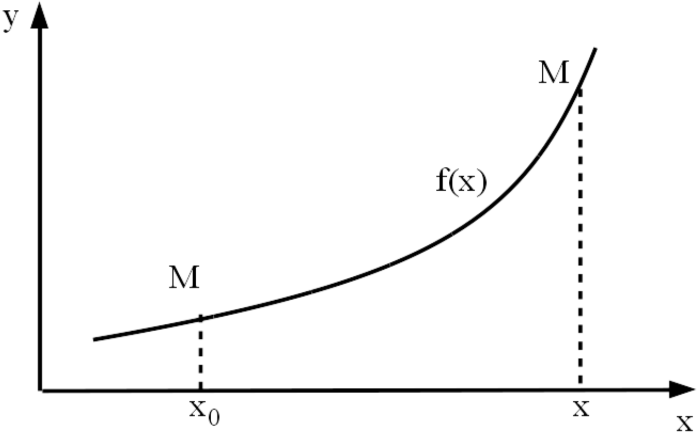

Рис. : Приращение Δf и дифференциал df функции

Геометрический смысл дифференциала

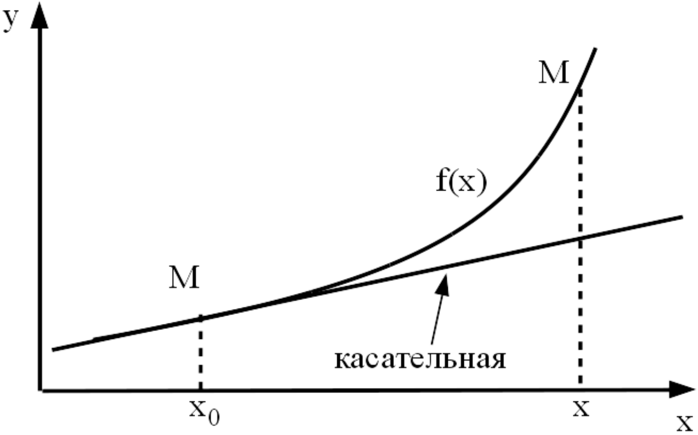

Рис. : Приращение Δf и дифференциал df функции

Геометрический смысл дифференциала

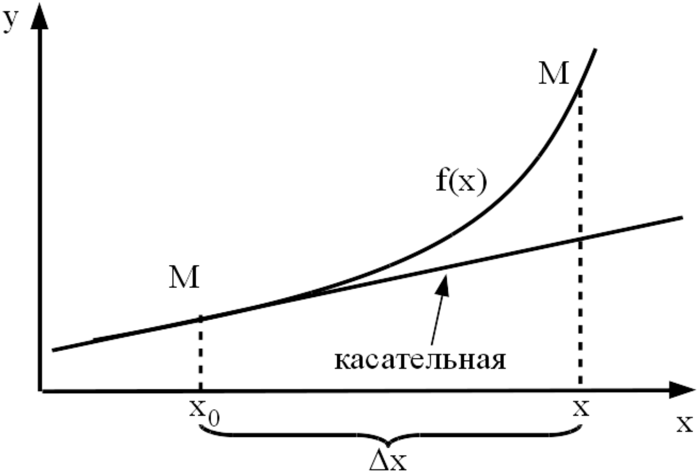

Рис. : Приращение Δf и дифференциал df функции

Геометрический смысл дифференциала

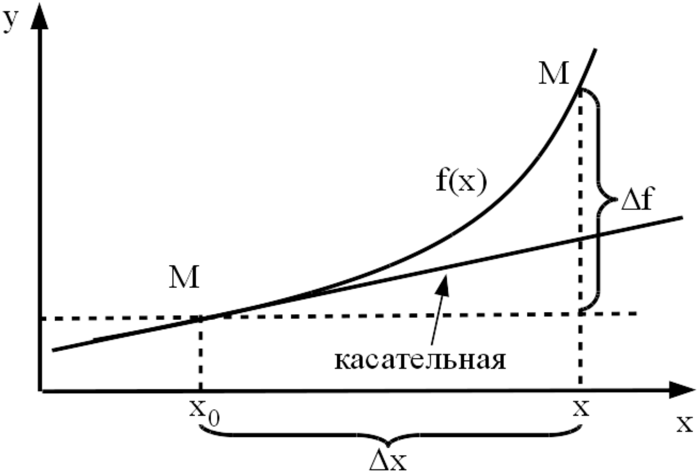

Рис. : Приращение Δf и дифференциал df функции

Геометрический смысл дифференциала

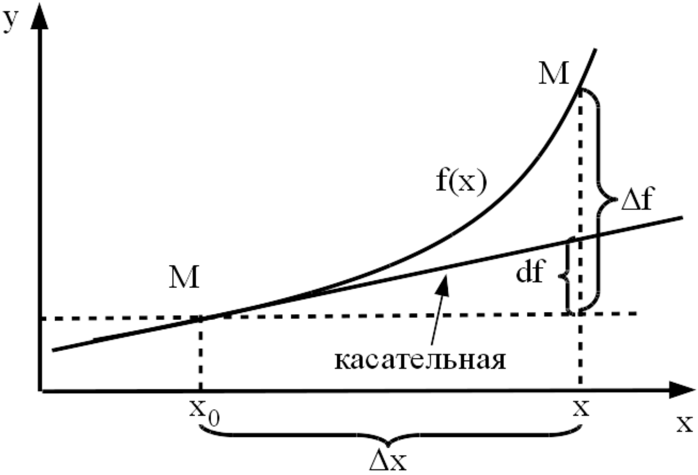

Рис. : Приращение Δf и дифференциал df функции

Геометрический смысл дифференциала

Если Δf - это приращение функции, то df - это приращение касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 при изменении аргумента на Δx.

Геометрический смысл дифференциала

Поскольку

Геометрический смысл дифференциала

Поскольку

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f - df}{df} =$$

Геометрический смысл дифференциала

Поскольку

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f - df}{df} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\circ(\Delta x)}{f'(x_0)\Delta x} =$$

Геометрический смысл дифференциала

Поскольку

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f - df}{df} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\circ(\Delta x)}{f'(x_0)\Delta x} = 0,$$

Геометрический смысл дифференциала

Поскольку

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f - df}{df} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\circ(\Delta x)}{f'(x_0)\Delta x} = 0,$$

то чем меньше приращение аргумента Δx, тем точнее дифференциал оценивает значение приращения функции.

Приближенные вычисления функции с помощью дифференциала

Приближенные вычисления функции с помощью дифференциала

$$\Delta f = df(x_0) + \circ(\Delta x), \Delta x \to 0$$

Приближенные вычисления функции с помощью дифференциала

$$\Delta f = df(x_0) + \circ(\Delta x), \Delta x \to 0$$

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \circ(\Delta x), \Delta x \to 0$$

Приближенные вычисления функции с помощью дифференциала

$$\Delta f = df(x_0) + \circ(\Delta x), \Delta x \to 0$$

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \circ(\Delta x), \Delta x \to 0$$

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \circ(\Delta x), \Delta x \to 0$$

Приближенные вычисления функции с помощью дифференциала

$$\Delta f = df(x_0) + \circ(\Delta x), \Delta x \to 0$$

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \circ(\Delta x), \Delta x \to 0$$

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \circ(\Delta x), \Delta x \to 0$$

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

Приближенные вычисления функции с помощью дифференциала

Пример:

Приближенные вычисления функции с помощью дифференциала

Пример:

$f(x) = \ln x, x = 1.1$

Приближенные вычисления функции с помощью дифференциала

Пример:

$f(x) = \ln x, x = 1.1 \Rightarrow x_0 = 1, \Delta x = 0.1$

Приближенные вычисления функции с помощью дифференциала

Пример:

$f(x) = \ln x, x = 1.1 \Rightarrow x_0 = 1, \Delta x = 0.1$

$f'(x) = 1/x, f'(x_0) = 1$

Приближенные вычисления функции с помощью дифференциала

Пример:

$f(x) = \ln x, x = 1.1 \Rightarrow x_0 = 1, \Delta x = 0.1$

$f'(x) = 1/x, f'(x_0) = 1$

$\Rightarrow \ln 1.1 \approx \ln 1 + 1 \cdot 0.1 = 0 + 0.1 = 0.1$

Приближенные вычисления функции с помощью дифференциала

Пример:

$f(x) = \ln x, x = 1.1 \Rightarrow x_0 = 1, \Delta x = 0.1$

$f'(x) = 1/x, f'(x_0) = 1$

$\Rightarrow \ln 1.1 \approx \ln 1 + 1 \cdot 0.1 = 0 + 0.1 = 0.1$

Точное значение: $\ln 1.1 = 0.09531$

Правила вычисления дифференциала

Правила вычисления дифференциала

1. $d(u+v) = du + dv$

Правила вычисления дифференциала

1. $d(u+v) = du + dv$
2. $d(u \cdot v) = v \cdot du + u \cdot dv$

Правила вычисления дифференциала

1. $d(u+v) = du + dv$

2. $d(u \cdot v) = v \cdot du + u \cdot dv$

3. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}, v \neq 0$

Инвариантность формы первого дифференциала

Инвариантность формы первого дифференциала

$f(x) = u(v(x))$ - сложная функция,

Инвариантность формы первого дифференциала

$f(x) = u(v(x))$ - сложная функция,
v - промежуточная переменная,

Инвариантность формы первого дифференциала

$f(x) = u(v(x))$ - сложная функция,
v - промежуточная переменная,
x - независимая переменная,

Инвариантность формы первого дифференциала

$f(x) = u(v(x))$ - сложная функция,

v - промежуточная переменная,

x - независимая переменная,

$v_0 = v(x_0)$

Инвариантность формы первого дифференциала

$f(x) = u(v(x))$ - сложная функция,

v - промежуточная переменная,

x - независимая переменная,

$v_0 = v(x_0)$

$$df(x_0) = f'(x_0)dx$$

Инвариантность формы первого дифференциала

$f(x) = u(v(x))$ - сложная функция,

v - промежуточная переменная,

x - независимая переменная,

$v_0 = v(x_0)$

$$df(x_0) = f'(x_0)dx = u'(v_0)v'(x_0)dx$$

Инвариантность формы первого дифференциала

$f(x) = u(v(x))$ - сложная функция,

v - промежуточная переменная,

x - независимая переменная,

$v_0 = v(x_0)$

$$df(x_0) = f'(x_0)dx = u'(v_0)v'(x_0)dx = u'(v_0)dv$$

Инвариантность формы первого дифференциала

Дифференциал первого порядка df выглядит одинаково, независимо от того, по какой переменной (независимой x или промежуточной v) он считается.

Дифференциалы высших порядков

Дифференциалы высших порядков

Определение

Дифференциалом второго порядка называется дифференциал от дифференциала первого порядка.

Определение

Дифференциалом второго порядка называется дифференциал от дифференциала первого порядка.

Обозначение: $d^2 f(x_0)$

Определение
Дифференциалом второго порядка называется дифференциал от дифференциала первого порядка.

Обозначение: $d^2 f(x_0) = d(df(x_0))$

Дифференциалы высших порядков

Определение
Дифференциалом второго порядка называется дифференциал от дифференциала первого порядка.

Обозначение: $d^2 f(x_0) = d(df(x_0)) = f''(x_0)dx^2$

Дифференциалы высших порядков

Определение

Дифференциалом n-ого порядка называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$-ого порядка.

Дифференциалы высших порядков

Определение
Дифференциалом n-ого порядка называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$-ого порядка.

Обозначение:
$d^n f(x_0)$

Дифференциалы высших порядков

Определение

Дифференциалом n-ого порядка называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$-ого порядка.

Обозначение:

$d^n f(x_0) = d(d^{n-1} f(x_0))$

Дифференциалы высших порядков

Определение

Дифференциалом n-ого порядка называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$-ого порядка.

Обозначение:

$$d^n f(x_0) = d(d^{n-1} f(x_0)) = f^{(n)}(x_0) dx^n$$